

STILLMAN DRAKE

MARINI GHETALDI PATRITII RAGVSINI,

Apollonius Rediuiuus.

Seu,

RESTITVTA APOLLONII PERGAEI Inclinationum Geometria.

CVM PRIVILEGIIS.



VENETIIS,

Apud Bernardum Iuntam.

M DC VII.

ILLVSTRISSIMO, AC REVERENDISSIMO CARDINALI SERAPHINO.

Marinus Ghetaldus S. P. D.

AIVNT nostri Perspectiui, opacum corpus, quo luminosum fuerit maius, cui opponitur, eo vmbras producere minores, productasq; coire tandem in puuctum, & illustrari. Sapui Cardinalis amplissime, dum opusculũ cogitaui dicare tibi; cuius lumen vt vni concedat, cæteris certè aut par est, aut antecellit vniuersis. Nam

præterquam quod perſolui debitũ, quo tibi ſexcentis nominibus obſtrictus eram, conſului præterea operi: quod nemo non videt futurum fuiſſe obſcurius, niſi illuminandum dediſſem Purpurato. Numerabitur, hoc inter cætera beneficia tua, referamque qui maius nõ poſſum idem ipſum quod accepi, & opus vnum atque idem monumentum extabit & beneficæ voluntatis tuæ, & grati animi mei.

Vale. Raguſij Kalend. Maij M DC VI.

AD LECTOREM.

APOLLONIVS Pergæus Geometra (vt eum veteres appellant) magnus, ſicut multa rerum mathematicarum monumenta, Pappo Alexandrino teſte, poſteritati reliquit, ita multa tempus edax rerum, & iniurioſa vetuſtas poſteritati conſumpſit, quattuor enim Conicorum libris duntaxat exceptis, reliqui temporis iniuria periere. Extant autem præter cætera apud Pappum in principio libri ſeptimi collectionum, ſub inclinationum titulo Problematum de inclinationibus opuſculi propoſitiones, eæ tamen tam vitiatæ tamque corruptæ, vt plus in ipſis intelligendis laborandum mihi fuerit, quam in ſoluendis, nec mirum, corruptus enim pluribus in locis latinus Pappi contextus, græcum, ita corruptum (vt Federicus Comandinus interpres affirmat) ſecutus eſt. Neque enim ex vitiato fonte, qui ex inde riuulus ſcatet, poteſt non vitiatus ſcatere. Reſtituto autem vt mihi quidem videtur in genuinam Auctoris ſententiam codice, ſolutiſque Problemati-

bus,

bus, videor opuſculum illud Apollonij ab interitu quodammodo ad vitam reuocaſſe, quare illud, ne ab Apollonio de ſuo nomine, aut contempto, aut ſuppreſſo accuſaret, ſub eius potiſſimum nomine apparere volui, & APOLLONIVS REDIVIVVS inſcribi.

COPIA.

GLI Eccellentissimi Signori Capi dell'Illustrissimo Consilio di X. Infrascritti hauuta fede dalli Signori Reformatori del Studio di Padoua, per relation delli dui à questo deputati, cioè del Reuerendo Padre Inquisitor, & del Circ. & fedelissimo Secretario del Senato Gio. Marauegia con giuramento. *Che nel Libro intitolato Marini Ghetaldi Patritij Ragusini, Apollonius Rediuus, seu Apollonij Pergæi inclinationum Geometria.* Non si troua cosa contra le leggi, & sono degno di Stampa, concedono licentia, che possino esser Stampato in questa Città.

Dat. die 17. Maij 1607.

D. Z. Battista Vitturi
D. Marco Triuisan. } Capi dell'Illustris. Cons. di X.
D. Vicenzo Dandolo.

Illustrissimi Consilij X. Sec.
Barth. Cominus.

1607. a' 18. Maggio Registrato in lib. à carte 170.

Ant. Lauren. Officij Cont. Blasph.

MARINI

GHETALDI APOLLONIVS REDIVIVVS

Seu,

RESTITVTA APOLLONII PERGAEI Inclinationum Geometria.

Problema I.

IN Dato circulo aptare rectam lineam magnitudine datam, quæ ad datum punctum pertingat.

Hoc Problema duos casus habet, vnum quidem si punctum detur extra circulum: alterum vero si detur intra.

Primo casu oportebit rectam magnitudine datam non esse maiorem diametro circuli, Secundo verò casu oportebit eam nec esse maiorem diametro circuli, nec minorem ea recta linea in circulo, quæ in dato puncto secat diametrum ad rectos angulos.

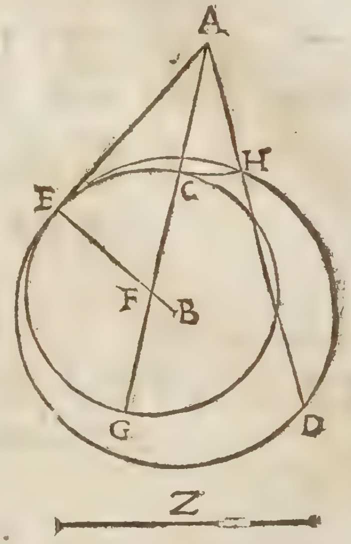
Constructio Primi casus.

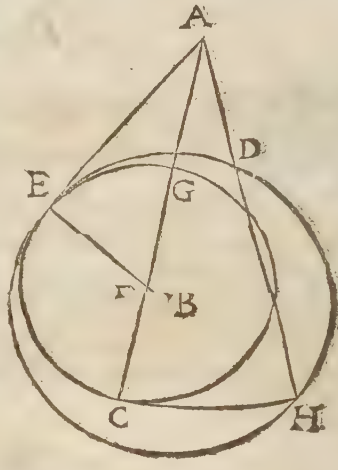
Sit datus circulus DHE cuius centrum B, datum autem punctum A quod sit extra circulum, & data magnitudine recta linea Z, quæ non sit maior diametro circuli. Oportet in circulo DHE rectæ lineæ Z æqualem rectam lineam aptare, quæ ad punctum A pertingat. Si diametro circuli DHE sit æqualis ipsa Z, ducatur ab A puncto diameter, & factum erit quod proponitur: si verò ipsa Z sit minor diametro, ducatur AE contingens DHE circulum in E, & conectatur BE, erit igitur * angu- *18.Tertij*

[redacted]

A lus

lus AEB rectus: deinde in EB, ſumatur EF, æqualis dimidiæ Z, & conectatur quoq; AF, & centro F, interuallo FE, deſcribatur circulus CEG, ſecans AF, continuatam in punctis C, G: hunc igitur circulum continget recta AE, in E: rectus enim eſt angulus AEF, deinde centro A, interuallo AC, deſcribatur alius circulus ſecans circulum DHE, in H, & per H, ducatur recta linea AHD, ſecans eundem circulum in D. Quoniam igitur æqualia ſunt rectangula HAD, 36 Tertij CAG, vtrique enim * equale eſt quadratum AE, atque eſt AH, æqualis AC. erit & AD æqualis AG, quare per ſubductionem æqualium æqualibus, reliqua HD, reliquæ CG erit æqualis: ſed CG æqualis eſt ipſi Z, vtraque enim dupla eſt ipſius FE; ergo & HD ipſi Z æqualis erit. In dato igitur circulo DHE, datæ rectæ lineæ Z æqualis erata eſt DH, ad punctum A pertingens, quod erat faciendum.



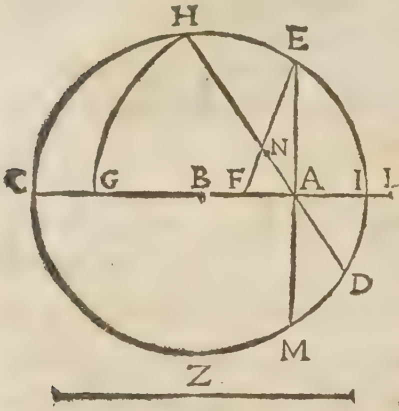


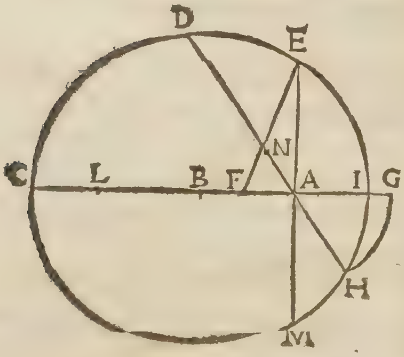
Conſtructio Secundi caſus.

IISDEM datis, ſit A punctum in circulo, & data Z non ſit maior diametro circuli dati DHE, neque minor ea recta linea in circulo, quæ in A puncto ſecat diametrum ad rectos angulos, & oporteat facere, quod imperatum eſt. Ducatur per A, circuli diameter CAI. Si igitur ipſa diameter æqualis ſit datæ Z; factum iam erit, quod proponebatur: ſi verò maior; ducatur per A, ipſi CI, ad rectos angulos EAM, & ſi ipſa EM, ſit

æqualis

æqualis datæ Z, rurſus factum erit, quod proponebatur: ſi verò minor, ponatur in AC, recta linea EF, æqualis dimidiæ Z, eſt autẽ dimidia Z maior, quam EA, (quandoquidem tota maior ponitur, quam tota EM,) quę eſt dupla ipſius EA: deinde ipſi FE æqualis fiat FG, & centro A, interuallo AG, deſcribatur circulus ſecans circulum DHE in H, & iuncta HA, producatur in D, & ſumatur FL, æqualis FG, vel FE. Quoniam igitur recta linea GL ſecta eſt in partes æquales ad F, & inæquales ad A, erit rectangulum GAL vna cum quadrato FA * ęquale quadrato FG, 5 Secũdi. hoc eſt FE, ſed quadratum FE, æquale eſt quadratis FA, EA, ergo rectangulum GAL, vna cum quadrato FA, æquale erit quadratis FA, EA, commune auferatur quadratum FA, reliquũ igitur rectangulum GAL reliquo quadrato EA erit æquale: ſed quadratum EA, hoc eſt rectangulum EAM * æquale eſt, 35 tertij rectangulo HAD, ergo rectangulum GAL erit æquale rectangulo HAD, atque eſt GA æqualis HA ex conſtructione, erit igitur & AL æqualis AD: & per additionem æqualium æqualibus erit tota HD æqualis toti GL, ſed GL eſt æqualis ipſi Z, vtraque enim GF, FL, æqualis eſt ipſi FE, hoc eſt dimidiæ Z, ergo & HD ipſi Z æqualis erit. In dato igitur circulo DHE, datæ rectæ lineæ Z æqualis aptata eſt DH, ad punctum A, pertingens, quod facere oportebat.





Diximus autem oportere datam Z, non eſſe maiorem diametro CI, neque minorem ipſa EM, quoniam in circulo maxima eſt diameter, & EM minima omnium, quæ per punctum A ducuntur.

Ducatur enim altera quædam recta linea HAD, eaque ſecetur bifariam in N. Quoniam igitur quadratum HN * æquale 5 Secũdi.

 eſt

est rectangulo H A D, vna cum quadrato N A, & quadratum
35.tertij. E A, hoc est rectangulum E A M, * æquale rectangulo H A D, tantum, quadratum E A, minus erit quadrato H N; quare; & recta EA, minor quam recta HN, & consequenter EM, minor quam HD: sunt enim EM, HD, ipsarum EA, HN, duplæ. Similiter demostrabimus EM, minorem esse omnibus rectis lineis, quæ per punctum A, ducuntur, quare manifesta est determinatio.

Problema II.

DATO Semicirculo, & recta linea sit ipsius basi perpendicularis, inter ipsam perpendicularem, & circumferentiam semicirculi ponere rectam lineam magnitudine datam, quæ ad semicirculi angulum pertingat.

Hoc problema quinque casus habet: duos quidem, si basim semicirculi scilicet, protractam illa perpendicularis secet. primus differt à secundo eo, quod in primo ponenda est recta linea magnitudine data inter perpendicularem, & conuexam semicirculi circumferentiam: in secundo autem ponenda est inter perpendicularem, & circumferentiam cauam.

Alios autem duos casus habet nempe tertium, & quartum, si perpendicularis in ipsam basim cadat: tertius differet à quarto, eo quod in tertio ponenda est illa magnitudine data inter perpendicularem, & cauam semicirculi circumferentiam: in quarto autem ponenda est inter perpendicularem, & circumferentiam conuexam.

Quintum denique casum habet, si perpendicularis in extremitatem basis semicirculi cadat.

Primi tres casus determinatione indigent, duo verò reliqui nequaquam.

Primò igitur casu oportebit rectam magnitudine datam nō esse minorem eo segmento basis productæ, quod inter perpendicularem, & circumferentiam interijcitur.

Secundò casu si basis semicirculi non sit maior prædicto basis segmento, oportebit illam magnitudine datam non esse minorem base producta vsque ad perpendicularem.

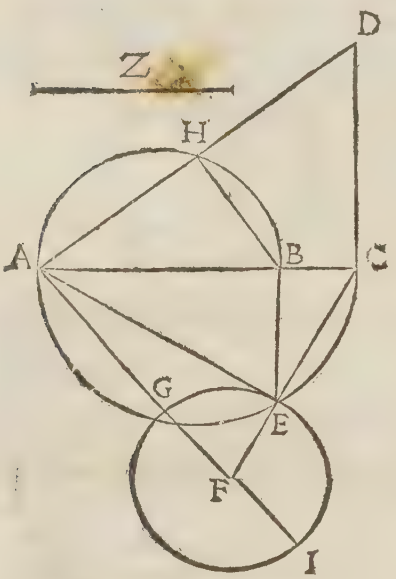
Si verò basis semicirculi non sit minor prædicto basis segmento

mento oportebit illam magnitudine datam non esse minorem dupla proportionali inter basim, & prædictum segmentum.

Tertiò denique casu oportebit rectam magnitudine datam non esse maiorem segmento basis semicirculi, quod inter perpendicularem, & circumferentiam interijcitur ex ea parte ponendæ.

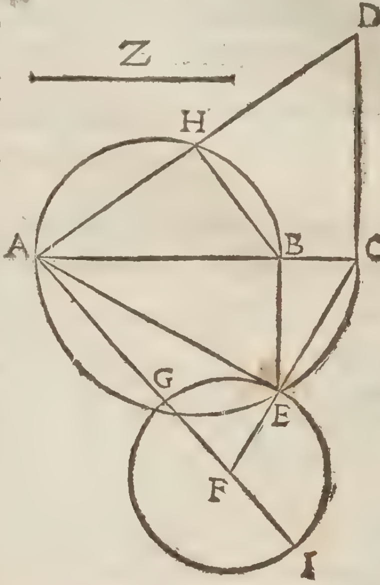
Constructio Primi casus.

Sit datus semicirculus AHB, in cuius basim AB, scilicet protractam, cadat perpendicularis DC, & data quoque magnitudine recta linea Z, quæ non sit, minor, quam BC, oportet inter perpendicularem DC, & circumferentiam AHB, rectæ lineæ Z, æqualem rectam lineā ponere, quæ ad punctum A, hoc est ad semicirculi angulū pertingat. Si BC sit æqualis ipsi Z, factum iam erit, quod proponitur, etenim inter perpendicularem DC, & circumferentiam AHB, posita est BC, datæ Z æqualis. Si verò BC, sit minor quā Z, describatur in AC, semicirculus AEC, & ipsi AC, agatur perpendicularis BE, & per E, ducatur recta linea CEF, vt sit EF æqualis dimidiæ Z, & iungatur AF, & centro F, interuallo FE, describatur circulus quem secet AF, continuata in punctis G, I: erit igitur recta GI, æqualis ipsi Z, & iuncta AE, continget circulum GEI: in E rectus est enim angulus AEF, cum sit rectus & AEC, in semicirculo. Deinde accommodetur in semicirculo AHB, recta AH, æqualis AG, inferius autem demonstrabitur AG, minorem esse quam AB: producatur denique AH, in D, & iungatur HB, Quoniam igitur quadratum AE, * æquale est rectangulo IAG, & * æquale quoque rectangulo CAB, est * enim AE, media proportionalis inter AB, AC: rectangulum IAG, æquale erit rectangulo CAB. 36. tertij. 17. Sexti. Ex coroll. 8. Sexti.



Et quoniam æquiangula sunt triangula AHB, ACD, angulus enim

enim AHB insemicirculo rectus est, & ideo æqualis angulo ACD, & angulus HAB communis est vtrique, proportionalia habebunt latera AB, AH, AD, AC, & rectangulo CAB sub extremis proportionalium equale erit rectangulum DAH sub medijs, sed rectãgulo CAB, ostensum est æquale rectangulum IAG, ergo rectangulum DAH rectangulo IAG erit æquale; atq; est AH æqualis AG, ex constructione ergo, & AD æqualis erit AI, & persubductionem æqualium AH, AG, æqualibus AD, AI, reliqua HD erit equalis reliquæ GI, sed GI ostensa est æqualis ipsi Z, ergo & HD ipsi Z æqualis erit. Posita est igitur inter perpendicularem DC, & circumferentiam AHB, datæ Z æqualis HD, ad punctum A pertingens, quod facere oportebat.



At verò AG minorem esse, quam AB, sic demonstrabitur: si enim non est minor; erit maior, vel æqualis: sed ponitur & GI, hoc est Z, maior, quam BC, ergo & AI tota maior erit, quam tota AC, ac proinde rectangulum IAG, hoc est quadratum

17. Sexti. AE, maius erit rectangulo CAB, quod est absurdum, illud *

Ex coroll. 8. Sexti. enim quadratum huic rectangulo est æquale, quoniam AE * media est proportionalis inter AB, AC, minor est igitur AG, quam AB, quod demostrare oportebat.

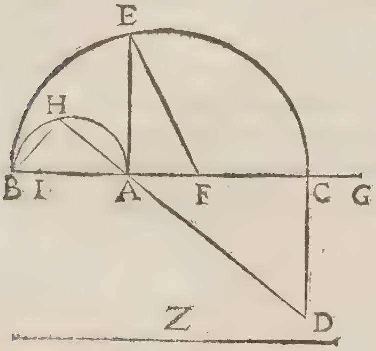
Diximus autem oportere datam Z non esse minorem, quam BC, quia BC est minima omnium, quæ ad punctum A pertingentes inter perpendicularem DC, & circumferentiam AHB, interijciuntur.

Ducatur enim altera quædam recta linea HD, quæ ad punctum A pertingat. Quoniam igitur AC minor est, quam AD, ipsa verò AB maior, quam AH, ablata AB ab AC & ablata quoque AH ab AD, reliqua BC minor erit, quam reliqua HD. Similiter demonstrabimus BC, minorẽ esse omnib. rectis lineis, quę ad punctum A pertingentes, inter perpendicularẽ DC, & circũferentiã AHB, interijciũtur: quare manifesta est determinatio.

Constru-

Constructio Secundi casus.

Sit datus semicirculus BHA, cuius basim BA, scilicet protractã secet DC, ad angulos rectos, data aũt recta linea sit Z, Oportet inter ipsam DC & circumferentiã BHA, datæ rectæ lineæ Z, æqualem rectam lineam ponere, quæ ad punctum A pertingat. Sit primum BA, non maior quam AC. in hoc casu oportebit datam Z non esse minorem, quam BC. Si igitur BC sit æqualis ipsi Z, factum iam erit, quod proponitur: si verò BC sit minor, quã Z; describatur in ea semicirculus BEC, & agatur perpendicularis AE & in AC ponatur EF æqualis dimidiæ Z, est autem dimidia Z maior, quam EA, quandoquidem tota Z ponitur maior, quam BC. Deinde sumatur FG, æqualis EF, vel dimidiæ Z: & in CD ponatur AD, æqualis AG: deinde producatur DA in H, & iungatur HB, & sumatur FI, æqualis FG, vel FE, Quoniam igitur IG, secta est in partes æquales ad F, & inæquales ad A, erit rectangulum IAG, vna cum quadrato AF * æquale quadrato FG, hoc est EF: sed quadratum EF æquale est quadrato AF vna cum quadrato EA, hoc est vna cum rectangulo BAC, ergo quadratum AF vna cum rectangulo BAC, æquale erit rectangulo IAG vna cum quadrato AF. commune auferatur quadratum AF, reliquum igitur rectangulum BAC reliquo rectangulo IAG æquale erit. 5. Secundi



Rursus, quoniam in semicirculo est angulus BHA, is est rectus, & ideò æqualis angulo DCA, & angulus HAB, æqualis est angulo CAD, sunt enim ad verticem, æquiangula erunt triangula BHA, DCA, & ideo proportionalia habebunt latera BA, AH, AD, AC, quare rectangulum HAD, sub medijs proportionalium erit æquale rectangulo BAC, sub extremis: sed rectangulum BAC ostensum est æquale rectangulo IAG: ergo rectangulum HAD, rectangulo IAG, æquale erit, atque est AD æqualis AG ex constructione: ergo, & AH æqualis erit AI, & per additionem æqualium AD, AG, æqualibus AH AI, erit HD ęqualis IG, sed IG æqualis est ipsi Z ex constructione,

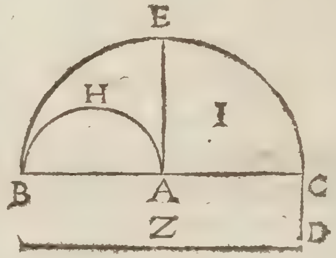
ergo

ergo & HD ipſi Z æqualis erit. Quare inter perpendicularem DC, & circumferentiam BHA, datæ rectæ lineæ Z, æqualis poſita eſt HD, ad punctum A pertingens, quod erat faciendum.

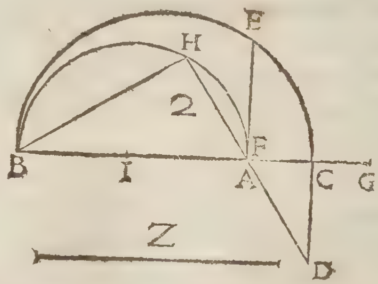
Diximus autem ſi BA non ſit maior, quam AC, oportere datam Z non eſſe minorem, quam BC, quia BC eſt minima omnium, quæ per punctum A ductæ inter perpendicularem CD, & circumferentiam BHA, interijciuntur.

Ducatur enim altera quædam recta linea HD, & iungatur BH, quoniam igitur propter ſimilitudinē triangulorum BAH, DCA, proportionales ſunt BA, AH, AD, AC, atque eſt maxima quidem AD, minima verò AH, erit HD compoſita videlicet ex maxima & minima * maior quam BC compoſita ex reliquis. Similiter oſtendemus BC minorem eſſe omnibus rectis lineis, quæ per punctum A ductæ inter perpendicularem DC, & circumferentiam BHA, interijciuntur: quare manifeſta eſt determinatio.

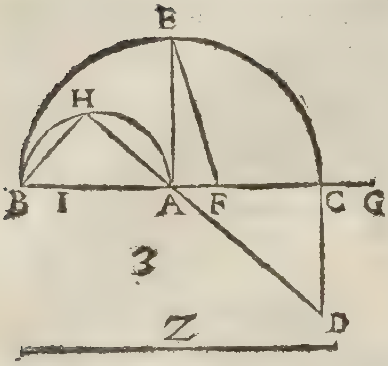
25. quinti

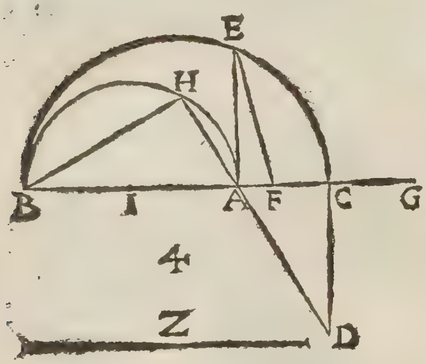


Deinde ſit BA non minor quam AC, & oporteat facere quod imperatum eſt: in hoc caſu oportebit datam Z non eſſe minorem, quam dupla proportionalis inter BA, AC, Deſcribatur igitur in BC ſemicirculus BEC, ipſique BC, ducatur perpendicularis AE: ſi igitur BA ſit æqualis AC, vt in prima figura, & dimidia Z, æqualis AE, hoc eſt tota Z, æqualis BC, factum iam erit, quod proponebatur. Si verò BA ſit maior, quam AC, vt in ſecunda figura, ac dimidia Z æqualis AE: vel ſi dimidia Z ſit maior quam EA, vt in tertia figura: ipſa verò BA æqualis AC vel vt in quarta figura maior, quocunque caſu ponatur in AC recta linea EF, æqualis dimidiæ Z, eſt autem dimidia Z, non minor quam EA, quandoquidem ex determinatione Problematis tota Z non eſt minor, quam dupla EA Deinde ſumantur FG, FI, equales ipſi EF, vel dimidię Z, & in DC ponatur AD æqualis AG, & producatur ad H, & iungatur BH. Quoniam igitur



igi tur





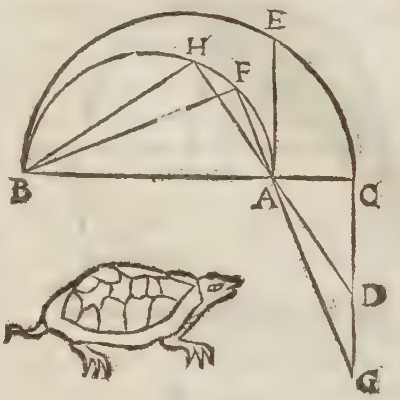
igitur IG ſecta eſt bifariam in F, & non bifariam in A, rectangulum IAG vna cum quadrato AF *æquale erit quadrato FG hoc 5. Secūdi. eſt quadrato EF, ſed quadratum EF ęquatur quadrato AF vna cũ quadrato EA, hoc eſt vna cum rectangulo BAC; ergo quadratum AF vna cũ rectãgulo BAC æquabitur rectangulo IAG vna cum quadrato AF, ablato communi quadrato AF reliquũ igitur rectangulum BAC reliquo rectãgulo IAG æquale erit; quare vt AB ad AI ita erit AG ad AC,* rectãgulorum enim æqualium reciproca ſunt latera. 14. Sexti.

Et quoniam æquales ſunt anguli BHA, ACD, eſt enim vterque: rectus hic ex cõſtructione: ille ex ui ſemicirculi, & æquales quoque anguli BAH, DAC ad verticem, ſimilia erunt triangula BAH, DAC, vt igitur AH ad AB ita erit AC ad AD, ſed oſtẽſum eſt vt AB ad AI ita eſſe AG ad AC, ergo * in perturbata proportione erit AH ad AI, ſicut 23. Quinti. AG ad AD, ſed ipſi AG poſita eſt æqualis AD, ergo & ipſi AH æqualis erit AI, quare per additionem æqualium AD, AG, æqualibus AH, AI, erit HD æqualis IG, ſed IG æqualis eſt ipſi Z ex conſtructione, ergo & HD ipſi Z æqualis erit. Poſita eſt igitur inter DC, & circumferentiam DHA datæ Z æqualis HD ad BHA punctum A pertingens, quod facere oportebat.

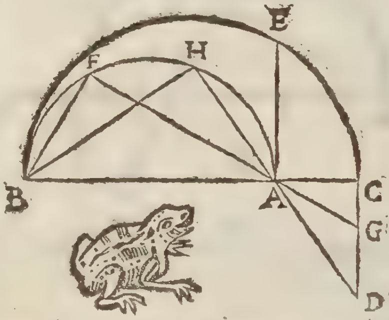
Diximus autem exiſtente BA non minori quam AC oportere datam Z non eſſe minorem quam dupla EA, quoniam ipſa EA dupla minima eſt omnium quæ per punctum A datæ inter perpendicularem CD & circumferentiam BHA interijciuntur.

Accomodetur enim in ſemicirculo BHA recta linea AH æqualis AE, & producatur donec ſecet ipſam CD in D, & iungatur BH. Quoniam igitur in ſemicirculo eſt angulus BHA, is eſt rectus, & ideo ęqualis angulo ACD, & angulus HAB, ęqua-

lis est angulo CAD, sunt enim ad uerticem: æquiangula erunt triangula BHA, DCA, vt igitur BA ad AH, ita erit AD ad AC, sed vt BA ad AE hoc est ad AH, ita est AH ad AC, ergo AH erit equalis AD, & cõsequenter tota HD dupla erit ipsius EA. Ostendendum igitur est ipsam HD esse minimã omnium, quę per punctum A ductę inter perpendicularem CD, & circumferẽtiam BHA interijciuntur.



Ducatur enim altera quædam recta linea FAG, & iungatur BF, Quoniam igitur eadem ratione æquiangula sunt triãgula BFA, GCA, qua BHA DCA, erit vt FA ad AB, ita AC ad AG, sed ostẽsũ est supra vt BA ad AH, ita esse AD ad AC, ergo in perturbata proportione erit vt FA ad AH, ita AD ad AG, sed in prima figura maxima est FA, minima vero AG, in secũda figura maxima AG, minima FA, quocunque igitur casu HD* minor erit quam FG. Similiter demonstrabimus HD hoc est duplam EA minorem esse omnibus rectis lineis, quæ per A punctum ductæ inter perpendicularem CD, & circumferentiam BHA interijciũtur, quare manifesta est determinatio.



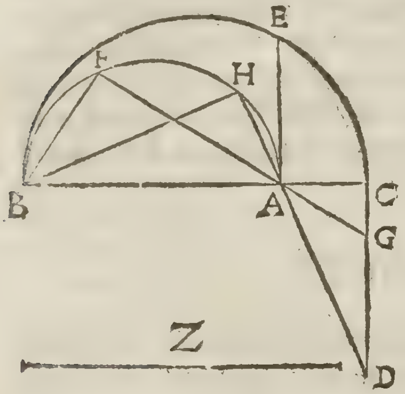
25. Quinti.

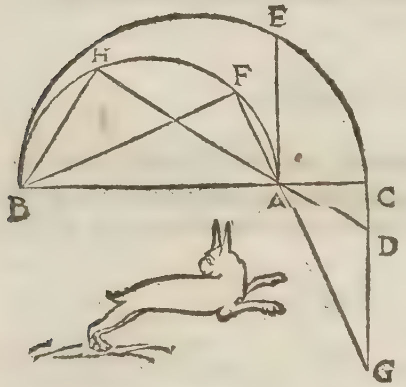
Corollarium.

Ex iam demõstratis colligitur omnes rectas lineas, quæ per punctum A ducuntur, ac duplã EA, superant, diuisas in puncto A in partes inæquales diuidi.

Si igitur basis semicirculi fuerit maior eo, segmento basis productæ, quod inter perpendicularem, & circumferentiam interijcitur, fuerit autem & illa magnitudine data maior quam dupla proportionalis inter basim semicirculi, & prædictũ segmentum,

mentum, non autem maior, quam basis producta vsque ad perpendicularem, possibile erit inter ipsam perpendicularem, & circumferentiam semicirculi ponere duas rectas lineas ei, quæ magnitudine datur æquales, quarum vtraque ad vnum eundẽque semicirculi angulum pertingat.





Exponatur enim semicirculus BHA, cuius basim BA scilicet protractã secet CD ad rectos angulos, & sit BA maior quam AC, & in BC describatur semicirculus BEC, & ducatur perpẽdicularis AE ea erit media ꝓportionalis inter BA AC. exponatur quoque recta linea Z, quæ sit maior quã dupla EA, non autem maior quã BC. Dico inter perpendicularem CD, & circumferentiam BHA possibile esse ponere duas rectas lineas expositæ Z æquales, quarum vtraque ad punctum A pertingat. Ponatur enim inter CD, & circumferentiam BHA ipsi Z æqualis HD, quę ad punctum A pertingat, & accommodetur in semicirculo BHA recta linea AF ęqualis AD, ea non erit eadem quæ AH, nam ex antecedente corollario sunt inęquales HA AD, neque maior erit quam BA, vt inferius demonstrabitur. Deinde producatur FA donec secet rectam CD in G, & iungantur BF BH; Quoniam igitur æquiangula sunt triangula BHA, DCA, id autem pluribus in locis demonstrauimus: erit vt HA ad AB, ita AC ad AD, sed propter similitudinem triangulorum BFA, GCA, est vt AB ad AF, ita AG ad AC, ergo in perturbata proportione, vt HA ad AF, ita erit AG ad AD, & permutando vt HA ad AG ita AF ad AD, sed AF æqualis est AD ex constructione; ergo & HA ipsi AG æqualis erit; quare per additionem æqualiũ HA, AG æqualibus AD, AF, erit tota FG æqualis toti HD hoc est Z expositæ.

Possibile igitur est per punctum A ducere duas rectas lineas expositæ Z æquales, quod erat ostendendum.

At vero AD non esse maiorem quam BA sic demonstrabitur, sit si fieri potest AD maior quam BA, ergo AH minor erit quam AC, quandoquidem tota HD ponitur non maior quam tota BC, & quoniam propter similitudinem triangulorũ BHA, DCA, proportionales sunt BA, HA, AD, AC, atque est maxima quidem AD minima verò AH, erit HD, * composita videlicet ex maxima & minima, maior quam BC composita ex reliquis, quod est absurdum, ponitur enim HD hoc est ipsa Z non maior quam B C. Non igitur AD maior est quam BA, quod erat demostrandum.

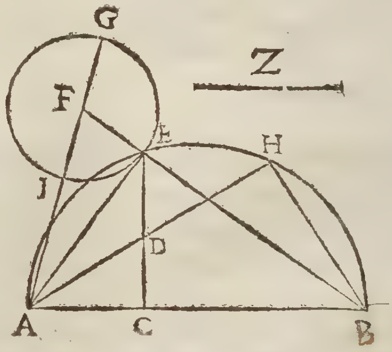
* 25. quinti.

Corollarium.

Et manifestum est ex iam demostratis si BA maior sit quam AC, & insuper data Z maior quam dupla EA, non autem maior quam BC duobus modis Problema posse absolui, hoc est duas rectas lineas Problema efficere, quod demonstrare oportebat.

Constructio Tertij casus.

Sit datus semicirculus AHB in cuius basim AB cadat perpẽdicularis D C, & data quoque magnitudine recta linea Z, quæ non sit maior quam CB. Oportet inter perpendicularem D C, & cauam AHB circumferentiam rectæ lineæ Z ęqualem rectam lineam ponere, quæ ad punctũ A pertingat.



Si BC sit æqualis ipsi Z, factum iam erit, quod proponitur, si verò BC sit maior quam Z, secet recta CD circunferentiam AHB in E, & ducatur recta linea B E F vt sit EF æqualis dimidiæ Z, & iungatur AF, & centro F interuallo FE describatur circulus, quem secet A F continuata in punctis G, I, erit igitur recta GI æqualis ipsi Z, & iuncta AE continget circulũ GEI in E, rectus est enim angulus AEB in semicirculo.

Deinde

Deinde in EC ponatur AD æqualis AI, punctum D cadet inter E, & C quoniam AI minor est quam AE vt * patet, maior au- *8. Tertij.*
tem quam AC vt inferius demonstrabitur. Denique producta AD in H, iungatur HB, quoniam igitur quadratum AE * æqua- *36. Tertij*
le est rectangulo IAG, & * æquale quoque rectangulo CAB, *17. Sexti.*
est * enim AE media proportionalis inter AC, AB, erit rectan- *Ex coroll.*
gulum IAG æquale rectangulo CAB. *8. Sexti.*

Et quoniam quadrilateri DHBC duo anguli oppositi DHB, DCB sunt recti, hic ex constructione, ille ex ui semicirculi, & ideo duobus rectis æquales, quadrilaterum illud DHBC erit in circulo, & rectangulum DAH * æquale erit rectangulo CAB, *Ex coroll.*
sed rectangulum IAG ostensum est æquale rectangulo CAB, *36. tertij.*
ergo rectangulum DAH rectangulo IAG æquale erit, atque est AD æqualis AI ex cōstructione, erit igitur & AH æqualis AG; quare per subductionē ęqualiū ab ęqualibus reliqua DH erit ęqualis reliquæ IG hoc est Z datæ. Inter perpendicularem igitur DC, & circumferentiam AHB datæ rectæ lineæ Z posita est DH ad punctum A pertingens, quod erat faciendum.

At verò AI maiorem esse quam AC sic demonstrabitur, si enim non sit maior, erit, vel minor, vel æqualis, sed ponitur, & IG hoc est Z minor quam CB, ergo AG tota minor erit quam tota AB, ac proinde rectangulum IAG hoc * est quadratū AE *36. Tertij*
minus erit rectangulo CAB, quod est absurdū, illud enim quadratum huic rectangulo est * æquale, quoniam AE est * media *17. Sexti.*
proportionalis inter AB, AC. Maior igitur est AI quam AC, *Ex coroll.*
quod erat ostendendum. *8. Sexti.*

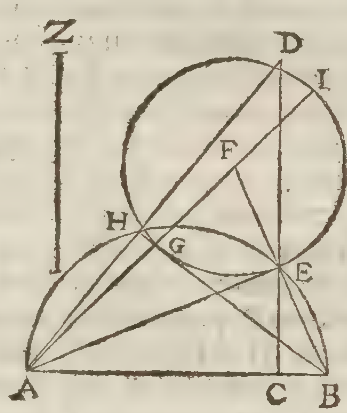
Diximus oportere datam Z non esse maiorem quam CB, ipsa enim CB est maxima omnium quæ per punctum A ductæ inter perpendicularem DC, & cauam AHB circumferentiam interijciuntur.

Ducatur enim altera quædam recta linea DH, eaque ad punctum A pertingat. Quoniam igitur maior est AB quam AH, & maior AD quā AC, si auferatur AC ab AB, & auferatur quoque AD, quæ est maior quam AC, ab AH minore quam AB, relinquetur CB maior quam DH. Similiter demonstrabimus CB maiorem esse omnibus, quæ per punctum A ductæ inter perpendicularem DC, & cauam AHB circumferentiā interijciuntur; quare manifesta est determinatio.

Constru-

Constructio Quarti casus.

Sit datus semicirculus AHB, in cuius basim AB cadat perpendicularis DC, data autē recta linea magnitudine sit Z, & oporteat inter perpendicularem DC, & connexam AHB circumferentiam, rectæ lineæ Z æqualem rectam lineam ponere, quæ ad punctum A pertingat.



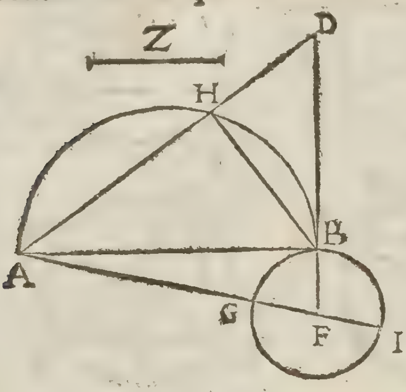
Ducatur per punctum E in quo perpendicularis DC secat circumferentiam AHB recta linea BEF, vt sit EF æqualis dimidiæ Z, & iungatur AF, & cētro F īteruallo FE describatur circulus, quem secet AF continuata in punctis G, I, erit igitur recta GI æqualis ipsi Z, & ducta AE continget circulum GEI, in E, rectus est enim angulus AEF, cum sit rectus & angulus AEB in semicirculo. Deinde in DC ponatur AD æqualis AE secans circumferentiam AI
36.tertij. AHB in H, & iungatur HB. Quoniam igitur quadratū AE * æ-
17.Sexti. quale est rectangulo IAG, & æquale quoque rectangulo CAB,
Ex coroll. 8.Sexti. est enim EA * media proportionalis inter AC, AB, rectangulum IAG æquale erit rectangulo CAB.

Et quoniam æquiangula sunt triangula AHB, ACB nam angulus AHB in semicirculo rectus est, & ideo æqualis angulo ACD recto, & angulus HAB communis vtrique; proportionales erunt AH, AB, AC, AD, & rectangulum DAH sub extremis æquale erit rectangulo CAB sub medijs, sed rectangulum IAG ostensum est ęquale rectangulo CAB, ergo rectangulum DAH rectangulo IAG æquale erit, atque est AD æqualis AE AI ex constructione, erit igitur, & AH æqualis AG, quare per subductionem æqualiū ab æqualibus, reliqua DH æqualis erit reliquę IG hoc est Z datæ. Inter perpendicularem igitur DC, & circumferentiam AHB datæ rectæ lineæ Z æqualis posita est DH ad punctum A pertingens, quod erat faciendum.

Constru-

Constructio Quinti, & vltimi casus.

Sit datus semicirculus AHB, in cuius basis extremitatem cadat perpendicularis DB, data autem recta linea magnitudine sit Z. Oportet inter perpendicularem DB, & circumferentiã AHB rectæ lineæ Z æqualem rectam lineam ponere, quæ ad punctũ A pertingat: Producatur DB in F, vt sit BF æqualis dimidiæ Z, & iungatur AF, & centro F interuallo FB describatur circulus, quẽ secet AF continuata in punctis GI, erit igitur recta GI æqualis ipsi Z, & AB cõtinget circulũ GBI in B, rectus est enim angulus ABF. Denique in BD ponatur AD æqualis AI secans circunferentiam AHB in H, & iungatur HB.



Quoniam igitur in triangulo rectangulo ABD, ab angulo recto B ad basim AD ducta est perpẽdicularis BH, angulus enim AHB in semicirculo est rectus, erit * AB media proportionalis inter AH AD, quare rectangulum HAD * æquale erit quadrato AB, sed & rectangulum GAI * æquale est eidem quadrato AB, ergo rectangulum HAD rectangulo GAI æquale erit, sed AD cum sit æqualis ipsi AI ex constructione, erit & AH æqualis ipsi AG, ablatis igitur æqualibus AH, AG ab æqualibus AD, AI reliqua HD erit æqualis reliquæ GI, hoc est Z datæ. Posita est igitur HD inter perpendicularem DC, & circumferentiam AHB recta linea HD æqualis Z datæ, & ad punctum A pertingit, quod erat faciendum.

Ex coroll. 8. Sexti. *17. Sexti.* *36. Tertij* DB

Quod si quis proposuerit. Data portione circuli, & recta linea cum ipsius base constituat angulum è regione portionis æqualem ei quem data portio suscipit; inter illam rectam lineam, & portionis circumferentiam ponere rectam lineam magnitudine datam, quæ ad portionis angulum pertingat.

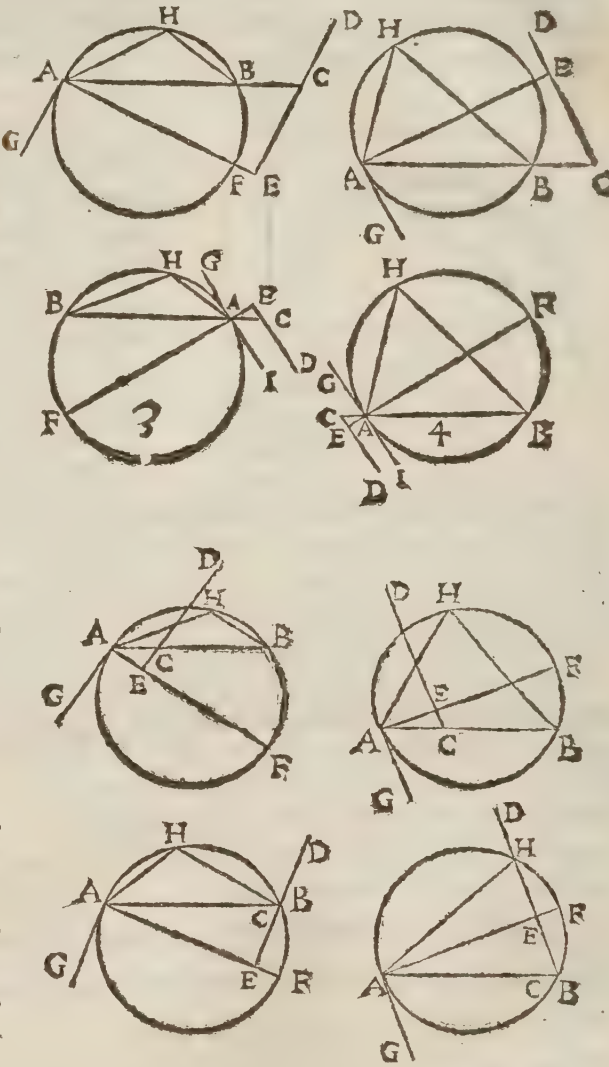
Dico Problema hac ratione propositũ non esse vniuersalius præcedente vt videtur: illa enim recta linea, quæ cum base portionis

tionis

tionis constituit angulum è regione portionis æqualẽ ei quem data portio suscipit, perpendicularis est basi semicirculi, cuius ea portio est ducta à prædicto portionis angulo, quod quidem ita demonstrabitur.

Exponatur enim quælibet circuli portio AHB, & recta linea D C constituat cum ipsius base AB angulum D C A æqualẽ angulo A H B, quẽ ea portio suscipit, & compleatur circulus, cuius diametrũ AF hoc est basim semicirculi A H F ductam à puncto A secet recta D C in E. Dico angulum AED esse rectũ, ducatur enim AG ipsi AF ad rectos angulos, ea igitur cõtinget circulum AHB in A & angulus CAG

32.Tertij * æqualis erit angulo A H B hoc ẽ angulo DCA, sũt enim æquales anguli AHB, DCA, quia portio AHB suscipit angulũ æqualẽ ipsi D C A,



quare parallelæ erunt DC, AG, & ideo angulus GAE erit æqualis angulo AED, sed rectus est GAE ex constructione, ergo & AED rectus erit, quod erat demonstrandum.

At verò in tertia figura, & quarta angulum CAG esse æqualem angulo AHB sic demonstrabitur. Producatur GA in I quoniam

niam igitur angulus I A B æqualis est angulo C A G, sunt enim ad verticē, & * æqualis quoque angulo AHB, erit angulus CAG æqualis angulo A H B. 32. Tertij

Problema igitur de portione circuli propositum, idem est ac si proponeretur de semicirculo, eademque omnino ratione absoluetur.

Detur enim circuli portio AHB, vt supra, & recta linea D C constituat cum ipsius base AB, angulum DCA æqualē ei quem portio AHB suscipit. Oporteatque inter rectam DC, & circunferentiam AHB, datæ rectæ lineæ Z, æqualem rectam lineā ponere, quæ ad punctum A, hoc est ad portionis angulum pertingat. Compleatur semicirculus A H F, si portio A H B sit minor semicirculo, si verò sit maior, abscindatur ab ea semicirculus AHF. Quoniam igitur recta DC perpendicularis est basi semi circuli AF, vt supra demonstrauimus, erit problema de portione circuli, idem quod de semicirculo, quare eadem quoque ratione absoluetur.

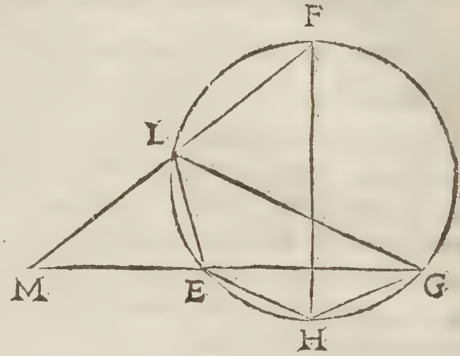
Sed quoniam problema hoc ex eorum numero est, quæ determinata appellantur proponendum est de semicirculo: si enim proponeretur deportione circuli, eius casus non sine maxima difficultate distinguerentur, ac præterea determinari nequirent, nisi prius demonstretur eam rectam lineam, quæ cum base portionis circuli constituit angulum è regione portionis, æqualem angulo in portione, perpendicularem esse basi semicirculi, cuius ea portio est ducta à prædicto portionis angulo hoc est nisi prius reuocetur ad problema de semicirculo propositum.

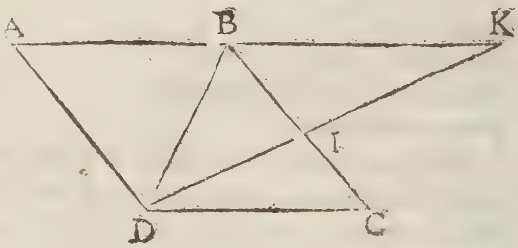
Problema III.

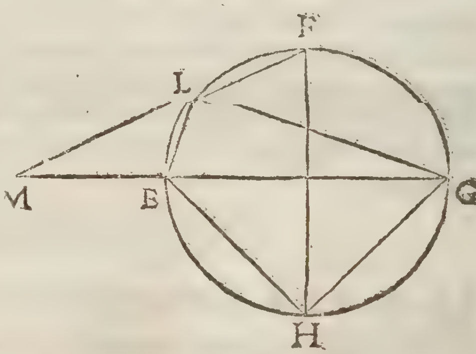
ROMBO dato, & vno latere producto, aptare sub angulo exteriori magnitudine datam rectam lineam, quæ ad oppositum angulum pertingat.

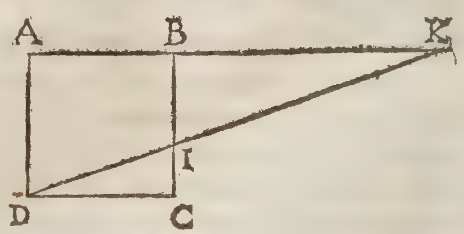
Sit datus rombus ABCD cuius diameter BD, data autem recta linea EG, & producatur AB indefinite in K. Oportet sub angulo C B K, aptare rectam lineam ipsi EG æqualem, ita vt ad oppositum angulum A D C pertingat. Describatur in EG portio circuli EFG, quæ suscipiat angulum æqualem angulo CBK, & compleatur circulus EFGH, cuius diameter F H secet ipsam E G ad rectos angulos, à puncto autem F, ducatur recta linea

F L M, ſecans circulum in L, ipſam verò GE productam in M, ita vt LM ſit æqualis ipſi BD, hoc enim fieri poſſe iam demonſtratum eſt in quarto caſu antecedentis problematis, & iungatur L G, cui æqualis ponatur BK, & iuncta quoque KD ſecet latus B C, in I. Dico ipſam IK problema efficere. Iungantur enim LE, EH, HG. Quoniam igitur portio circuli EFG ſuſcipit angulum æqualē angulo C B K, angulus ELG æqualis ē ipſi CBK. Et quoniam quadrilaterum L E H G eſt in circulo, anguli EHG, ELG oppoſiti duob. rectis ſunt æquales; ſed & anguli ABC, C B K æquales ſunt duobus rectis, ergo anguli ABC, CBK, angulis EHG, E L G æquales erunt: auferantur æquales anguli CBK, E L G, reliquus igitur A B C, reliquo E H G æqualis erit, ſed vterque ſectus eſt bifariam, angulus videlicet ABC, à diametro BD, & angulus E H G, ab ipſa FH, anguli enim EHF, F H G æqualibus circumferentijs E F, FG inſiſtentes ſunt æquales, ergo angulus D B C angulo EHF ęqualis erit, ſed angulo EHF, quadrilateri EHFL, in circulo ęqualis eſt angulus M L E, externus videlicet interno, & oppoſito, ergo angulus DBC æqualis eſt angulo MLE, & per additionem æqualium







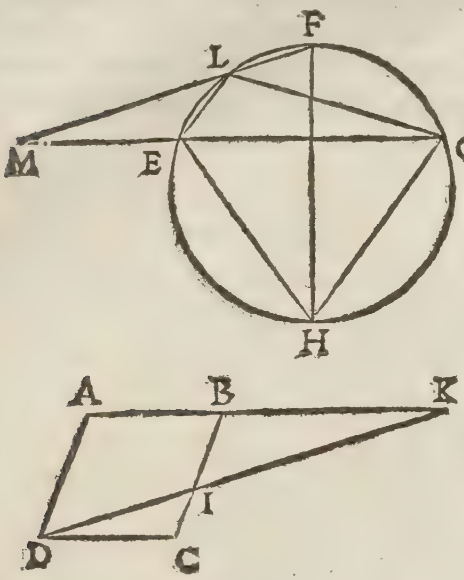


lium æqualibus, totus angulus DBK, toti MLG æqualis erit: sed & latus DB æquale est lateri M L ex constructione. & latus B K æquale lateri LG: triangula igit̃ *DBk MLG ęqualium erunt laterum, & angulorũ, & ideo angulus k, ęqualis erit angulo LGM. Quoniam igitur trianguli BKI angulus k, æqualis est angulo L G E trianguli L G E, & angulus IBK æqualis angulo ELG, atque latus BK æquale lateri LG erit, & *basis I K basi E G æqualis. Sub angulo igitur CBK aptata est IK æqualis EG datæ, atque ad angulum ABD pertingit, quod faciendum erat.

4. Primi.

6. Primi.

A C

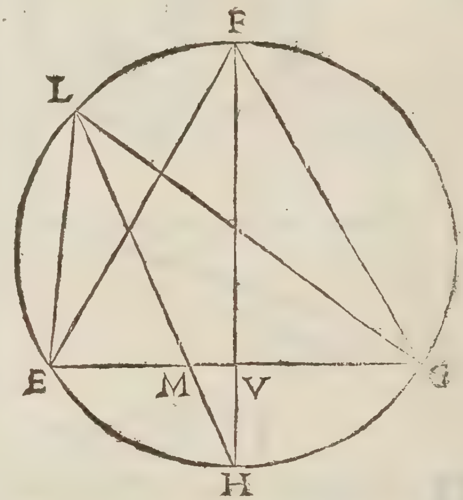


Ploblema IIII.

ROMBO dato, & duobus lateribus productis, aptare sub angulo interiori, magnitudine datam rectam lineam, quæ ad oppositum angulum pertingat. Oportet autem illam magnitudine datam non esse minorem, ea recta linea, quæ per extremitatem diametri ad rectos angulos ducta, inter producta, rombi latera interijcitur.

Sit datus rombus ABCB, cuius diameter BD. data autem recta linea EG, & producãtur BA, BC indefinite. Oportet sub angulo CBA aptare rectam lineam æqualem ipsi EG, ita vt ad angulum ADC pertingat; ducatur per D punctum ipsi BD perpẽdicularis ODN, secans BA, BC productas in punctis O N. Si igitur ON sit æqualis ipsi EG, factum iam erit quod proponitur, si verò E G sit maior, quam O N, minor autem nõ est quoniam ita est determinatum. Describatur in EG portio circuli EFG, quæ suscipiat angulum æqualem angulo C B A, & compleatur circulus E F G H, cuius diamerer F H secet ipsam E G ad rectos angulos in V, à puncto autem H, ducatur recta linea H M L secans ipsam EG in M, circulum verò in L, ita vt L M sit æqualis

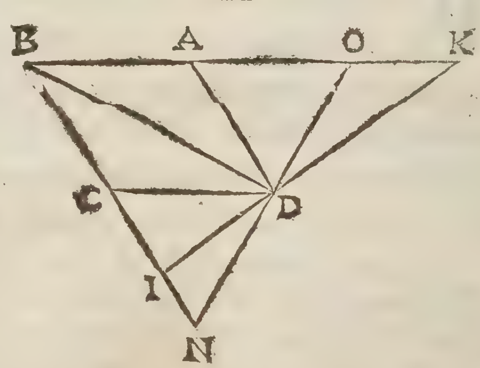
ipſi BD: id enim iā docuit ſecundi Problematis caſus tertius, & verò BD minorem eſſe quam FV, inferius demonſtrabitur. Deinde iungatur LG cui æqualis ponatur BK, & iuncta quoque KD producatur, donec ſecet BC continuatam in I, & iungatur LE. Quoniam igitur portio circuli EFG ſuſcipit angulum æqualem angulo CBA, angulus ELG angulo CBA æqualis erit.



Et quoniam LH diuidit angulum ELG bifariam, anguli enim ELH, HLG, æqualibus circumferentijs EH, HG, inſiſtẽtes ſunt æquales: ſimiliter & BD diameter rombi diuidit angulum CBA bifariam, erit angulus HLG angulo DBK æqualis: eſt autem & latus LG æquale lateri BK ex conſtructione, & latus LM æquale lateri BD, triangula igitũ LGM, *BKD, ęqualium erunt laterum & angulorum, vnde angulus LGM æqualis erit angulo k. Quoniam igitur trianguli LGE angulus LGM æqualis eſt angulo k, trianguli BKI, & angulus ELG ęqualis angulo IBK, vt eſt demonſtratum, atque recta LG æqualis rectæ BK ex conſtructione, erit &*EG ipſi IK æqualis. Sub angulo igitur CBA, aptata eſt IK æqualis EG datæ, atque ad punctum D, hoc eſt ad angulum CDA pertingit, quod erat faciendum.

26. Primi

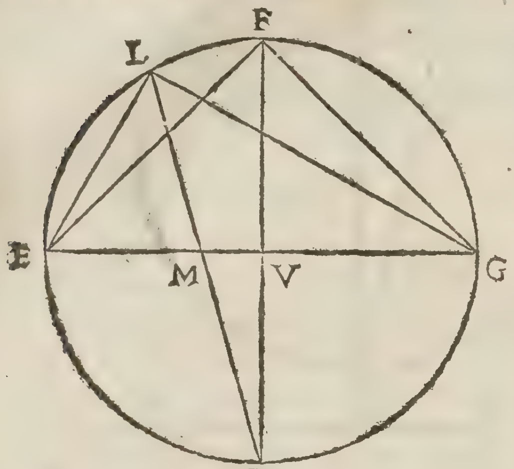
26. Primi

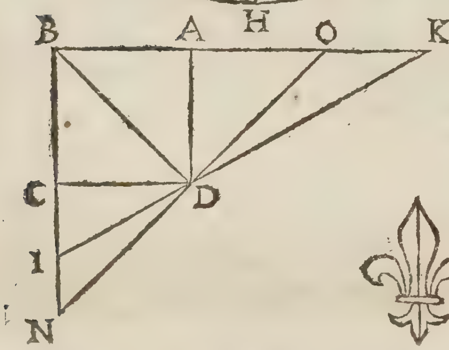


At verò BD minorem eſſe quam FV, ſic demonſtrabitur. Iungantur EF, FG, angulus igitur EFG æqualis eſt angulo CBA, quoniam portio circuli EFG ſuſcipit angulum æqualem ipſi

CBA,

CBA, ſed vterque ſectus eſt bifariam à rectis lineis F H, B D, ergo angulus V F G æqualis erit angulo D B O, eſt autem & angulus F V G angulo B D O æqualis: rectus enim eſt vterque, ergo, & reliquus reliquo æqualis erit, ſimilia igitur erũt triangula FVG, BDO, vt igitur OD ad DB, ita erit GV ad VF, & permutando, vt OD ad GV, ita DB ad VF, ſed OD minor eſt quam GV: quandoquidẽ tota O N, quæ eſt dupla ipſius O D, ponitur minor quam EG, dupla videlicet ipſius G V, ergo, & BD minor erit quam FV, quod erat demonſtrandum.



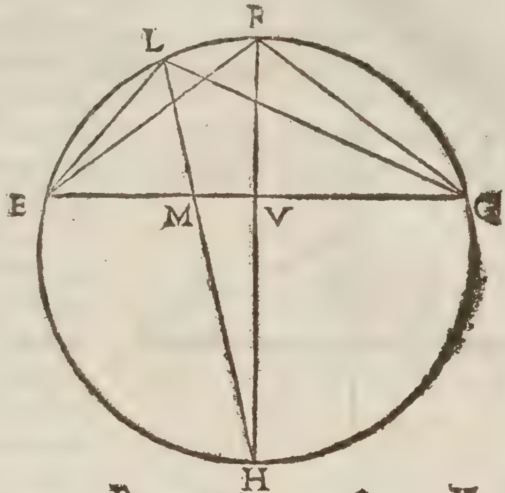


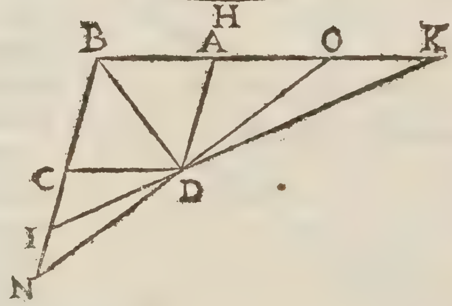
Diximus autem oportere ipſam E G non eſſe minorẽ quam O N, quia O N minima eſt omniũ, quæ per punctum D ductæ, inter producta latera BA, BC interijciuntur.

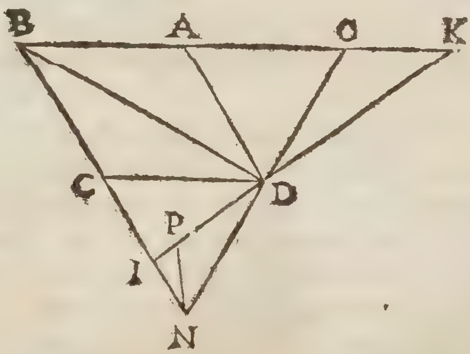
Ducatur enim per pũctum D, altera quædam recta linea IDK. Quoniam igitur angulus CBA ſectus eſt bifariam à diametro BD, angulus DBN æqualis erit angulo D B O, ſed & angulus B D N æqualis eſt angulo B D O, rectus videlicet recto, ergo & reliquus reliquo æqualis erit, triangula igitur BDN, BDO, ſimilia erunt, ſed & æqualia, quia latus B D commune eſt vtrique, ergo N D æqualis erit ipſi D O, & angulus B O D æqualis angulo B N D, ſed angulus B O D maior eſt angulo k, externus videlicet interno, & oppoſito, ergo & angulus B N D angulo k maior erit, fiat igitur angulo k æqualis angulus D N P, ergo æquiangula erunt triangula P N D, O K D, quia æquales habent & angulos ad D, vt igitur D K ad D O, ita erit D N ad DP, ſed D k maior eſt quam D O, ergo & D N quam D P maior erit, itaque quoniam maior eſt D k, quam

DO, hoc est quam DN, & DN maior quã DP, erit Dk omnium maxima, & DP minima, & quoniã quatuor rectæ lineę proportionales sũt Dk, DO, DN, DP, atque est maxima quidẽ Dk, minima verò DP, erit Pk composita videlicet ex maxima, & minima, * maior quã NO cõposita ex reliquis, ergo Ik multo maior erit, quã NO. Similiter demõstrabitur NO minorem esse omnibus, quæ per pũctum D ducuntur, quare manifesta est determinatio.

25. quinti.







Problema

Problema V.

DATIS duobus ſemicirculis indirectum baſes habentibus, inter ipſorum circumferentias ponere rectam lineam magnitudine datam, quæ ad angulum vnius ſemicirculorum pertingat.

Hoc problema ſicuti varias habet datorum ſemicirculorum poſitiones, ita varios habet caſus, quorum vnuſquiſque ſua indiget determinatione, cauſa magnitudinis datæ rectæ lineæ, ad quos explicandos, ordinandoſque (excogitaui enim ſolutionem) animus requiritur plane ſolutus, ac vacuus: talis in præſentia non eſt meus, quod cum à Republica noſtra Conſtantinopolim legatus mittar, ad exponendum potius, legationem, quam ad problema explicandum, animum applicem neceſſe eſt. Diſtuliſſem autem, vt omnia ſimul euulgarentur, libri editionem ad redditum meum libentiſſimè, niſi Nicolaus Tuditius, & Luca Bonus, ingenioſi ſanè viri, & prudentes, mihique coniunctiſſimi, aliud mihi ſuaſiſſent: aiebant enim hac arte excitari, acuique multorum ingenia poſſe, vt dum problematis ſolutionem deſiderant, ipſi interim ſtudeant excogitare ſolutionem, aquieui: edidi librum: propoſito tantum non ſoluto problemate, expecto dum ſoluatur ab alio. Ego interim amice lector, ne videar, aut inuidiſſe tibi, aut de fuiſſe mihi, cum primum ex legatione ocij, aliquid nactus fuero, abſoluam tibi problema, imponam operi faſtigium, ſatisfaciã muneri meo, voluntati tuæ.

MARINI GHETALDI PATRITII RAGVSINI,

SVPPLEMENTVM Apollonij Galli.

Seu,

EXSVSCITATA APOLLONII PERGAEI Tactionum Geometriæ pars reliqua.

CVM PRIVILEGIIS.



VENETIIS,

Apud Vincentium Fiorinam.

M DC VII.

VIRO

ILLVSTRISSIMO PAVLO EMILIO CAESIO.

E MARCHIONIBVS RIANI,

Marinus Ghetaldus S. P. D.

OPVSCVLVM, quod ex facta ad Apolloniũ Gallum accessione, supplementum Apollonij Galli nominaui, tuorum erga me ingentium meritorum capio esse testem. Nobilitatis. Sapientiæ, cæterarumque virtutum tuarum, ac præsertim benignitatis, qua viros doctos complecteris, monumenta extant multa, multaque deinceps ponentur. Id quod proprium mihi est, ego præ me feram, palamque profitebor, tu mihi studia mea, tu laborum anteactæ vitæ susceptorum fructum, tu vitam ipsam reddidisti, quod scribo tuum est, vt igitur beneficij tui hic liber est fructus, ita sit testis.

Vale. Ragusij Pridie Nonas Maij M DC VI.

AD LECTOREM.

DECEM Apollonij Pergæi magni Geometræ problemata, Franciscus Vieta, Seu Apollonius Gallus, non minor Geometra fæliciter construxit. At in libro tactionum Apollonij Pergæi sexdecim problemata erant: sic enim refert Pappus Alexandrinus in septimo collectionum Mathematicarũ libro

EX INTERPRETATIONE Comandini.

DEINCEPS sequuntur duo libri tactionum, propositiones autem in ipsis videntur esse plures, sed nos vnam posuimus, quæ sic habet. Punctis, & rectis lineis, & circulis, tribus quibuscunque positione datis, circulum describere per vnumquodque datorum punctorum, qui vnamquamque linearum datarum contingat. Huius ob similitudinem datorum in positionibus similium, vel dissimilium, particulares propositiones differentes fieri necessarium est, ex tribus enim dissimilib. generibus triadis differentiæ inordinatæ fiunt numero decem, vel enim data tria puncta, vel tres rectæ lineæ, vel duo puncta, & recta linea, vel duæ rectæ lineæ, & punctum, vel duo puncta, & circulus, vel duo circuli, & punctum, vel duo circuli, & recta linea, vel punctum, & recta linea, & circulus, vel duæ rectæ lineæ, & circulus, vel tres circuli. Horum prima duo ostensa sunt in quarto libro, primorum elementorum, quæ ab eo scripta sunt, illud enim tribus datis punctis, quæ non sint in recta linea, idem est quod circa datum triangulum circulum describere, at illud datis tribus rectis lineis, quæ non sint parallelæ, sed omnes inter se conueniant, idem est quod in dato triangulo circulum describere. Etenim si duæ sint parallelæ, & vna incidat, est veluti pars sextæ subdiuisionis. Describuntur in his omnia, & sex quæ deinceps sunt in primo libro, duo verò reliqua videlicet, duabus datis rectis lineis, & circulo, vel tribus datis circulis tantum in secundo libro. Cum autem ob multas tum circulorum, tum rectarum linearum inter se positiones, quæ pluribus determinationibus indigent, homogeneæque sunt, ac eiusdem naturæ cum prædictis tactionibus, multitudo quædam oriatur Problematum, factum est, vt ab ijs, qui libros digesse-

digesserunt omissa fuerit in hoc secundo libro, à nonnullis autem priori libro addita sit. Erat enim breuis introductioni que imprimis accommodatus, in eoque absoluebatur vniuersum genus tactionum. Rursus autem vnica tantum propositione omnia complectar, quæ quidem hypothesi à prædicta deficiat, epitagmate verò abundet, est autem huiusmodi.

Ex punctis, & rectis lineis, & circulis, quibuscunque duobus datis, circulum describere magnitudine datum, qui per datum punctum, vel data puncta transeat; contingat autē vnamquamque datarum linearum, hæc continet problematum species numero sex: ex tribus enim dissimilibus generibus dualitatis, differentiæ inordinatæ fiunt numero sex: nam vel duobus datis punctis, vel duabus datis rectis lineis, vel duobus datis circulis, vel puncto, & recta linea, vel puncto, & circulo, vel recta linea, & circulo, datum magnitudine circulum describere, vt dictum est, &c.

Non igitur exsuscitauit Apollonius Gallas vniuersam Apollonij Pergæi tactionum Geometriam, omisit enim sex problemata ad illam Geometriam pertinentia, sed ea supplebimus, & sic Apollonius Gallus, non sine Illyrico Apollonium Pergæum, qui extintus iniuria temporum, vel à barbaris oppressus iacebat, excitabit.

MARI-

MARINI GHETALDI PATRITII RAGVSINI SVPPLEMENTVM Apollonij Galli.

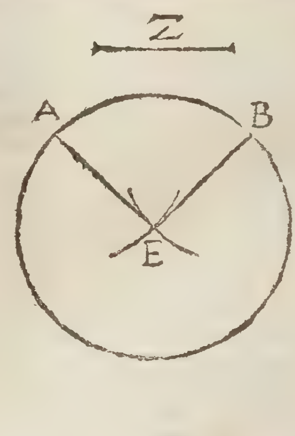
Seu,

EXSVSCITATA APOLLONII Pergæi tactionum Geometriæ pars reliqua.

Problema I.

PER data duo puncta circulum magnitudine datum describere. Oportet autem diametrum describendi circuli non eſse minorem interuallo punctorum.

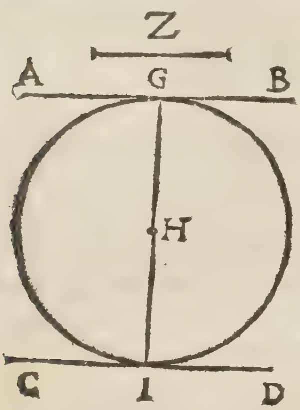
Sint data duo puncta A, B, data quoque recta linea magnitudine Z. Oportet per A, B, circulum describere, cuius semidiameter sit æqualis datæ rectæ lineæ Z. Centro A interuallo rectæ Z æquali, describatur circulus, item centro B interuallo eodem alius circulus describatur secans priorem, vel tangẽs in E, ex vi determinationis præmissæ ipsum tanget, vel secabit, & iungantur AE, BE. Si igitur circulus describatur ex E centro, interuallo EA, vel EB, transibit per AB, puncta, eiusque semidiameter æqualis, erit Z. datæ. atque adeo factum erit, quod oportuit.



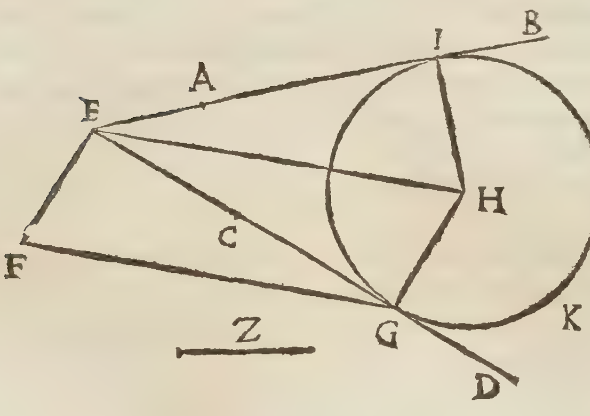
Problema II.

DATIS duabus rectis lineis; circulum magnitudine datum deſcribere, qui datas rectas contingat. Oportet autem ſi datæ rectæ lineæ ſint parallelæ, diametrum deſcribendi circuli æqualem eſſe parallelarum interuallo.

Sint datæ duæ rectæ lineæ poſitione AB, CD, data autem recta linea magnitudine Z. Oportet circulum deſcribere, qui datas AB, CD, contingat, habeatque ſemidiametrum æqualem ipſi Z, Si AB, CD, ſint parallelæ, ducatur inter ipſas perpendicularis I G, quæ ſecetur bifariam in H, & centro H, interuallo H G, vel H I, deſcribatur circulus, eius igitur ſemidiameter HG, vel HI, ex determinatione Problematis, erit æqualis Z datæ, & circulus cuius centrum H continget rectas AB, CD, in punctis G I.



Si verò AB, CD, non ſint parallelę, conuenient interſe, conueniant in E, & ſecetur bifariam angulus B E D, à recta linea EH, & ducat̃ EF ipſi E D perpendicularis, datę verò Z æqualis, & ipſis E H, EF, agantur parallelæ F G, G H, & cẽtro H interuallo H G, deſcribatur circulus G K, quoniã igit̃ parallelæ ſunt EF, HG, angulus HGE, æqualis erit angulo F E G, ſed rectus eſt F E G ex conſtructione, ergo & HGE, rectus erit : circulus igitur GK, continget rectam ED,



26.Primi ED, in G. Iam agatur HI, perpendicularis ipsi AB, *erunt igitur triangula HEI, HEG equalium laterum & angulorum, sunt enim anguli EIH, EGH, æquales nempe recti, & æquales quoque anguli IEH, GEH, quia EH diuidit totum angulum IEG, bifariam, latus autem EH commune est vtrique triangulo, quare HI, æqualis erit HG, circulus igitur GK transibit per I, atque rectam AB continget in ipso I puncto. Et quoniam parallelogrammum est EFGH, erit GH, æqualis EF, sed EF æqualis est ipsi Z, ex constructione, ergo & GH, vel HI ipsi Z æqualis erit. Descriptus est igitur circulus GK, qui datas AB, CD, contingit in GI, habetque semidiametrum HG, vel HI, æqualem Z datæ, quod erat faciendum.

Problema III.

DATIS *duobus circulis tertium circulum magnitudine datum describere, qui datos circulos contingat.*

Varios casus hoc Problema habet, propter varias datorum circulorum positiones, & variam descriptionem circuli magnitudine dati, quorum casuum sex sunt principales, eorum enim conditionibus reliqui omnes subijciuntur.

Determinatio Primi casus.

Vt circulus describendus tangatur extra, oportebit eius diametrum non esse minorem segmento rectæ lineæ centra duorum datorum circulorum conectentis, quod inter conuexam vtriusque circumferentiam interijcitur.

Determinatio Secundi casus.

Vt circulus describendus tangatur intus, oportebit eius diametrum non esse minorem, ea recta linea, quæ duorum datorum circulorum conectens centra, inter cauam vtriusque circumferentiam interijcitur.

Determinatio Terti casus.

Vt circulus describendus, ab vno datorum tangatur extra, ab altero

altero intus, oportebit eius diametrum non esse minorem segmento rectæ lineę, centra duorum datorum circulorum conectentis, quod inter conuexam circumferentiam vnius, & cauam alterius interijcitur.

Determinatio Quarti casus.

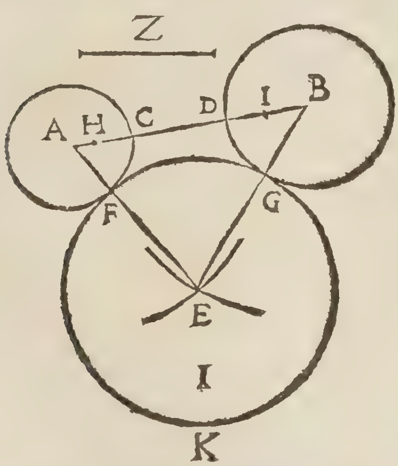
Si vnus datorum circulorum includat alterum, & vt circulus describendus tangatur extra, oportebit eius diametrum, nec esse maiorem segmento maiori rectæ lineæ, centra duorũ datorum circulorum conectentis, quod inter cauam circumferentiã vnius, & conuexam alterius interijcitur, nec minorem segmento minori.

Determinatio Quinti casus.

Vt circulus describendus ab vno datorum tangatur extra, ab altero intus, oportebit eius diametrum, nec esse maiorem segmento maiori rectæ lineæ, centra duorum datorum circulorũ conectentis, quod inter cauam vtriusque circumferentiam interijcitur, nec minorem segmento minori.

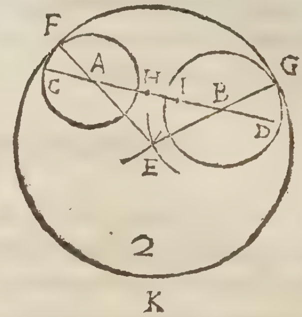
Determinatio Sexti casus.

Si denique duo dati circuli se inuicem secent, & vt circulus describendus ab vtroque datorum inclusus tangatur, oportebit eius diametrum nõ esse maiorem segmento rectæ lineæ, centra duorũ datorum circulorũ conectẽtis, quod inter cauam vtriusque circumferẽtiam interijcitur, in eo loco in quo describendus est circulus.

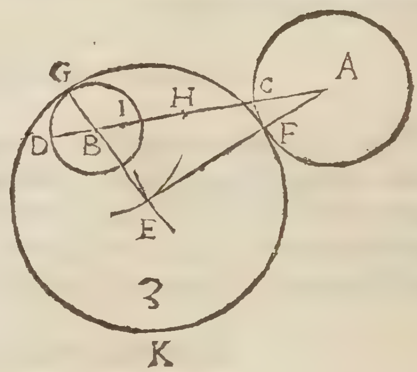


Potest etiã alios tres casus hoc Problema habere, si duo dati circuli se inuicem secent, sed quoniã similes sunt primo, secundo, & quarto casui, iisdemque prorsus determinatio-

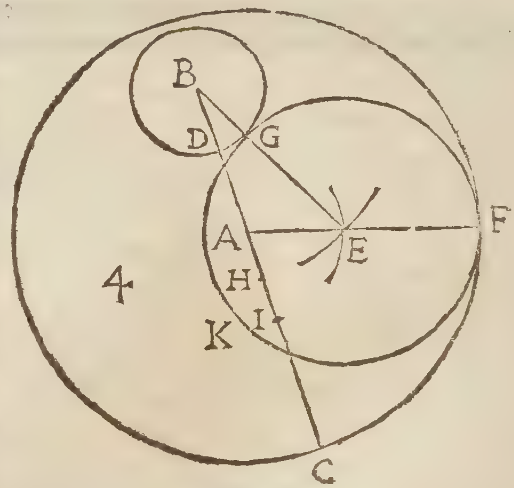
nib.indigent,præter eũ, qui ſimilis eſt primo, nullaque determinatio ne indiget, omituntur, omituntur etiam plures alij,quos poteſt habere, ſi dati duo circuli ſe inuicem contingant,quia ſunt ijdem qui ſupra, eademq́ue ratione abſoluuntur.

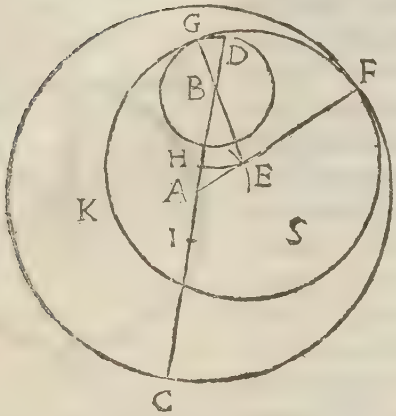


Prima figura ad primum caſum pertinet, ſecunda ad ſecũdum & ſic deinceps.

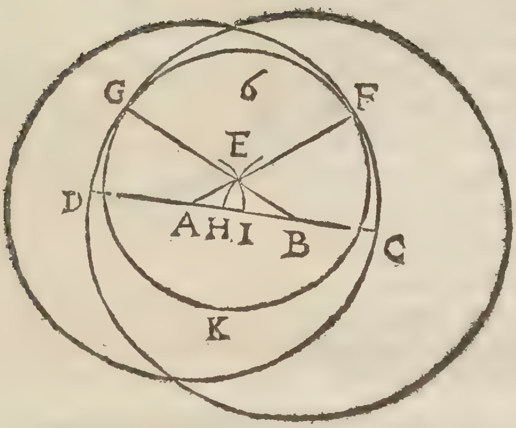


Sint igit̃ dati duo circuli, quorũ centra AB, data quoque recta linea magnitudine Z. Oportet tertium circulũ deſcribere, q datos circulos contingat, habeatq; ſemidiametrum ęqualẽ rectæ lineæ Z, Iungatur AB, & vbi res poſtulauerit producatur,ſecãs circulos AB, in punctis C,D,& ipſi Z ſumantur æquales CI, DH, & deſcribãtur duo circuli,vnus ex A, centro, interuallo AI, alter ex B, interuallo BH, ſecãs priorem vel tangens in E, ex vi terminationis illum tanget,vel ſecabit,deinde ducantur duæ rectæ lineæ EAF, EBG, illa ſecans circulum A, in F, hæc circulum B, in G, & centro E, interuallo EF, deſcribatur circulus FK, quoniam igitur AF, AC, ſunt æquales, vt ſemidia-



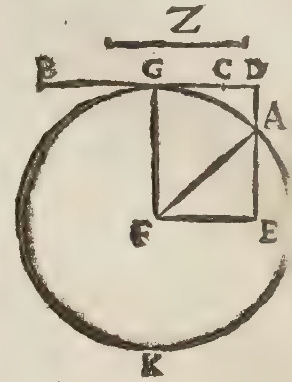


midia metri, & æquales quoq; AI, A E, erunt æquales, & FE CI, sed CI, æqualis est ipsi Z, ex constructione, ergo & FE, ipsi Z, æqualis erit. Rursus quoniã ęquales sunt BD, BG, & ęquales quoque BH, BE, erunt æquales & D H, G E, sed D H, æqualis est ipsi Z, ex constructione, ergo & GE, ipsi Z, vel FE, æqualis erit, circulus itaque FK, transibit per G, Quoniam igitur circulus FK, secat rectas EA, EB, per centra datorum A, B, circulorum ductas in pũctis F, G, in quibus easdem secant ipsi quoque circuli, circulus Fk, circulos A, B, continget in punctis F, G, Descriptus est igitur circulus FK, qui datos A, B, circulos contingit in F, G, habetque semidiametrum EF, vel F G, æqualem Z, datæ, quod erat faciendum.

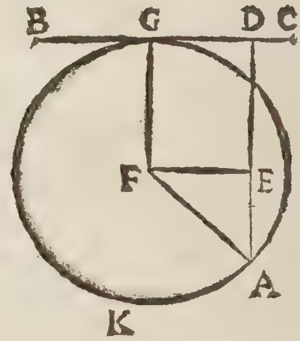


Problema IV.

DATO puncto, & recta linea, circulum magnitudine datum describere, qui per datum punctum transiens datam rectam contingat. Oportet autem diametrum describendi circuli non esse minorem ea perpendiculari, quæ à dato puncto ad datam rectam ducitur.



Sit datum punctum A, data quoque positione recta linea B C, ac data denique altera recta magnitudine Z, Oportet per A, circulum describere, qui rectam B C, contingat, eiusque semidiameter æquetur Z, datæ. Ducatur A D, ad rectos angulos ipsi B C, & sumatur DE, æqualis Z, deinde agatur EF, parallela ipsi BC, & in ea ponatur AF, æqualis 2 ex vi determinationis, data Z nō est minor quam A E, deinde centro F interuallo F A, describatur circulus A K, & ipsi A D, parallela agatur F G, quoniam igitur FGDE, parallelogrāmū est, erit F G, æqualis E D, hoc est ipsi F A, vel Z, quare circulus AK, transibit per G, atque ipsam BC, continget in ipso G puncto, angulus enim B G F, rectus est, cum sit æqualis angulo recto BDE, ratione parallelarum F G, D A, Descriptus est igitur per A punctum circulus A K, qui datam BC, contingit in G, atq; eius semidiameter FG, vel FA, æqualis est Z, datæ, quod erat faciendum.



Problema V.

DATO puncto, & circulo, alterum circulum magnitudine datum describere, qui per datum punctum transiens circulum datum contingat.

Hoc Problema tres casus habet, quorum vnusquisque determinatione indiget.

Determinatio Primi casus.

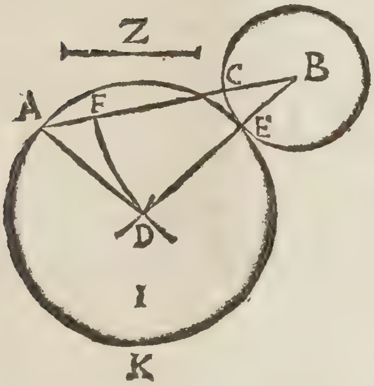
Vt circulus describendus tangatur extra, oportebit eius diametrum non esse minorem segmento rectæ lineæ centrum dati circuli, & punctum datū conectentis, quod inter ipsum punctum, & conuexam dati circuli circumferentiam interijcitur.

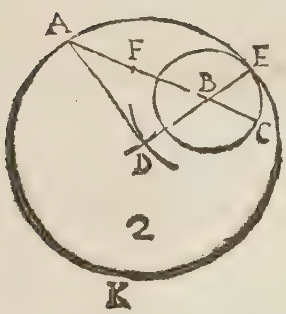
Deter-

Determinatio Secundi casus.

Vt circulus describendus tangatur intus, oportebit eius diametrum non esse minorem ea recta linea, quæ à dato puncto per centrum circuli dati ducta, inter ipsum punctum, & cauam circuli dati circumferentiam interijcitur.

Determinatio Tertij casus.





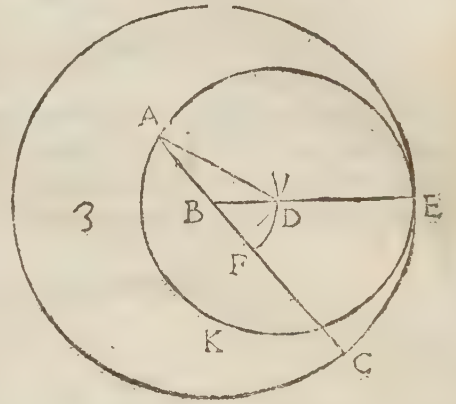
Si datum pũctum sit in circulo & per ipsum ducatur diameter, oportebit diametrum describendi circuli, nec esse maiorẽ segmento maiori diametri circuli dati, quæ in datò puncto diuiditur, nec minorem segmento minori.

Prima figura ad primum casum pertinet, secunda ad secundum & tertia ad tertium.

Sit igitur datum A punctũ, datus quoque circulus cuius centrum B, ac data denique recta linea magnitudine Z. Oportet per A punctum, alterũ circulum describere, qui circulum B, contingat, eiusque semidiameter æquetur Z datæ: à puncto A ducatur per B, centrum circuli, recta linea secans ipsum circulum in C, & sumatur C F, ipsi Z, æqualis, & describantur duo circuli vnus ex A centro, interuallo rectę Z æquali, alter ex B, interuallo B F, secans priorem, vel tangens in D, ex vi determinationis ipsum tanget, vel secabit. Deinde iungatur D A, & centro D, interuallo D A describatur circulus AK, & ducatur recta DBE, secans circulum B, in E, quoniam igitur BC, BE, vt semidiametri sunt æquales, & æquales quoque B F, B D, erunt æquales & C F, E D, sed C F, æqualis est ipsi Z ex constructione, ergo &

DE,

D E, ipsi Z, vel D A æqualis erit, atque adeo circulus A K, transibit per punctum E, & circulum cuius centrũ B continget in E, recta enim D B E, transit per centra D, B, Descriptus est igitur per A punctum circulus AK, datum circulum B contingens in E, eiusque semidiameter DA, vel DE æqualis est Z datæ, quod faciendum erat.



Problema V I.

DATA recta linea, & circulo, alterum circulum magnitudine datum describere, qui datam rectam lineam, ac datum circulum contingat.

Atque hoc Problema tres casus habet, quemadmodum & præcedens, ac etiam vnusquisqne determinatione indiget.

Determinatio Primi casus.

Vt circulus describendus tangatur extra, oportebit eius diametrum non esse minorẽ segmento rectæ lineæ, ex centro circuli dati super datam rectam lineam perpendiculariter cadentis, quod inter ipsam rectam, & conuexam dati circuli circumferentiam interijcitur.

Determinatio Secundi casus.

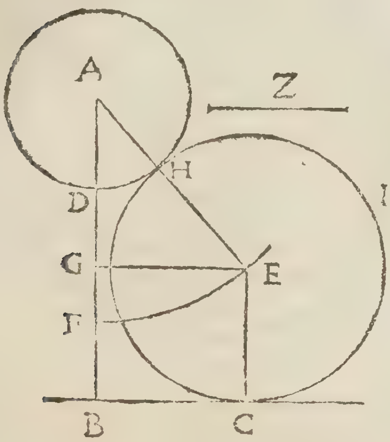
Vt circulus describendus tangatur intus, oportebit datam rectam lineam non esse in circulo dato, & cum ex eius centro ducatur recta linea ipsi datæ perpendicularis, diametrum describendi circuli non esse minorem prædicta perpendiculari, ea scilicet quæ inter datam rectam, & dati circuli cauam circumferentiam interijcitur.

Deter-

Determinatio Tertij caſus.

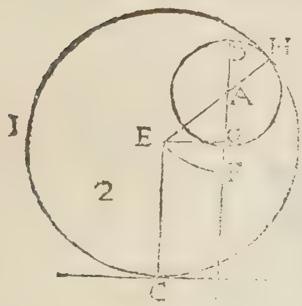
Vt circulus deſcribendus incluſus à dato circulo tangatur, oportebit datam rectam lineam eſſe in circulo dato, & cum ipſa data ſecuerit diametrum circuli dati ad rectos angulos, diametrum deſcribendi circuli non eſſe minorem ſegmento maiori diametri circuli dati.

maiorem
nec minorem ... minore



Prima figura, vt in alijs factum eſt ad primũ caſum pertinebit, ſecunda verò ad ſecundum, ac tertia ad tertium.

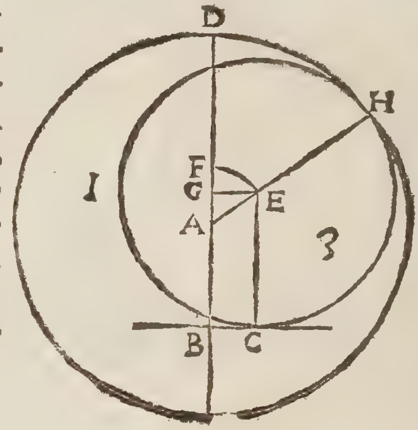
Sit data recta linea poſitione BC, data quoque altera magnitudine Z, ac datus denique circulus cuius centrum A. Oportet alterum circulum deſcribere, qui rectam BC, & circulum A contingat, ac præterea eius ſemidiameter ſit æqualis Z datæ, ducatur AB perpendicularis ad BC, ſecans circulum A in D, & ſumantur BG, DF, æquales ipſi Z, ipſi autem BC, parallala agatur GE, & centro A, interuallo AF, deſcribatur circulus, is autem ex vi determinationis tãget, vel ſecabit rectam GE, tangat vel ſecet in E, & iungatur AE, & ſi res poſtulauerit producatur, ſecãs circulum A in H, centro denique E, interuallo EH, deſcribatur circulus HI, is igitur continget circulum cuius centrum A, in H, & quoniam æquales ſunt AD, AH, vt ſemidiametri, & æquales quoque AF, AE, erunt æquales & DF, HE, ſed DF æqualis eſt ipſi Z ex conſtructione, ergo & HE ipſi Z æqualis erit. Iam agatur EC ipſi BC perpendicularis, erit igitur GBCE parallelogrammum, ac proinde GB æqualis EC, ſed GB æqualis eſt ipſi Z, ex conſtructione, ergo &



E C,

EC, ipſi Z æqualis erit; circulus igitur HI tranſibit per C, atque ipſam B C continget in ipſo C puncto, angulus enim E C B rectus eſt ex conſtructione. Deſcriptus eſt igitur circulus HI, qui datam BC contingit in C, datum verò circulum cuius centrum A, in H, atque eius ſemidiameter E H, vel E C æqualis eſt Z datæ quod erat faciendum.

Addatur ad Apollonij Galli Supplementum, id etiam quod ſequitur.



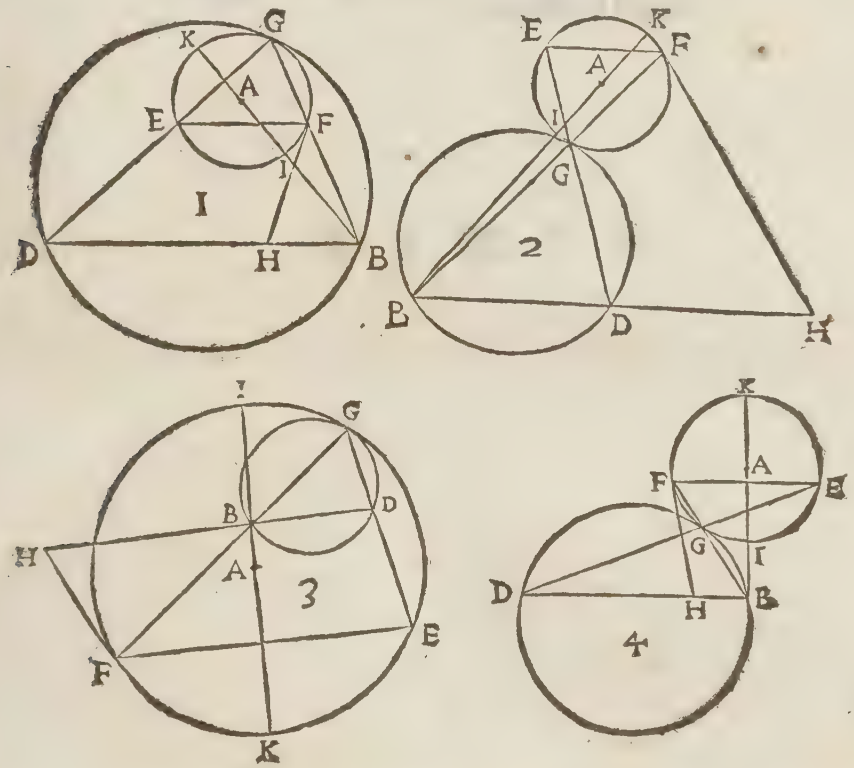
Conſtructio problematis octaui manca eſt, vel eam Typographus deprauauit, vel aduerſaria non bene reuiſit Vieta, in figuris enim deſunt lineæ A B, AF, in demonſtratione verò nō oſtendit differentiam quadratorum AB, AF æqualem eſſe ei, quod fit ſub BG, BF, illud autem licet veriſſimum ſit, nulla ratione patet ex ſe; quare cōſtructionem illam ſic reſtituo.

Problema

Problema VIII. Apollonij Galli.

DATIS duobus punctis, & circulo, per data duo puncta circulum describere, qui datum contingat.

Sint data duo puncta B. D. ac præterea circulus E F G, cuius A cenrrum. Oportet per puncta B. D. circulum describere, qui circulum G E F contingat, iungantur D B. AB ipsaque AB producatur, donec secet circulum G E F, in punctis K. I, & fiat vt B D, ad B K, ita BI, ad BH, rectangulum igitur D B H, sub extre-



mis æquale erit rectangulo KBI sub medijs. Deinde circulum GEF tangat recta HF, & conectatur BF, secans circulum EFG, tum in F, tum in G, & conectatur quoque DG, secans eundem

 circulum

circulum in E, & per puncta G, D, B, describatur circulus, & iungatur E F. Quoniam igitur rectangulum D B H æquale est rectangulo K B I, hoc est rectangulo G B F, puncta D, G, F, H, erunt in circulo, & angulus H F B æqualis erit angulo G D B: in prima enim & secunda figura, angulus externus quadrilateri in circulo, æqualis est interno, & opposito, in tertia verò, & quarta figura, sunt ipsi anguli in eadem portione circuli, sed angulus HFB æqualis est angulo G E F, ergo angulus G E F angulo GDB æqualis erit; quare similia erunt triangula GDB, GEF sub eodem G vertice. Vnde descripti circuli duo, vnus per puncta G, E, F, alter per puncta, G, B, D, se se contingent in G cõmuni vertice. Descriptus est igitur per D, B puncta circulus D B G, circulum G E F tangens in G, quod erat faciendum.

Atque hæc ad Apollonij Galli Supplementum, dicta sufficiant.

FINIS.

MARINI GHETALDI PATRITII RAGVSINI, VARIORVM PROBLEMATVM COLLECTIO.

CVM PRIVILEGIIS.



VENETIIS,

Apud Vincentium Fiorinam.

M DC VII.

VIRO
ILLVSTRISSIMO
MARINO
GOZIO,
PATRITIO
RAGVSINO
Marinus Ghetaldus S. P. D.

HESIODVS Scriptor ſanè iuxta antiquus, ac nobilis, in referenda gratia imitari nos iubet agros fertiles, qui plus multo afferunt quàm acceperunt. Ego Marine ſi voluntati reſponderet facultas feraces agros non imitarer modo, verum etiam ſuperarem. Enimuerò ingenij mei quaſi ager haud ſcio, an potiorem quam te colonum agnoſcat, qui dum me patria corporis verius alumna, quam animi, in alienas terras ingeniorum altrices vnà tecum extraxiſti, quaſi coluiſti agrum, quam autem gentem ad Doctorum multiplicitatem ſex annis vna peregrinati non adiuimus? Superiorem Germaniam omnem percurrimus: inferiorem totam,

Belgiumque lustrauimus: duos annos consedimus in Britania: Galliam deinde peragrauimus, & Italiam vniuersam, quas inter gentes, quot ego Doctores nactus sum (nactus autem sum plures) tot agro tu quasi præfecisti operarios. Accipe igitur ex culto agello, eo quo tibi offertur studio, huius anni fructum (præteritorum enim ideo non obtuli, quia fructus dare tibi nolui nisi prægustatos probatosque) qui si fortè minor est semente, totus est certè quem messui: talisque qui à Domino omnibus Reipublicæ nostræ muneribus perfuncto suam mutuabitur amplitudinem, suum decus.

Vale. Ragusij 13. Kal. Iunij M DC VI.

MARINI

GHETALDI VARIORVM PROBLEMATVM COLLECTIO.

INTER Problemata, quæ construere aggredior, sunt quædam Ioannis Regiomontani, quorum Geometricam constructionẽ ipse non exhibet, quamuis ea Algebrice, vel per sinus explicet. At problemata, quæ Algebrice explicari possunt, dummodo quadratorum metam æquationes non excedant, possunt quoq; & Geometrica ratione cõstrui, qua methodo, quaue ratione, in libro de resolutione, & cõpositione abunde explicabimus. Interim problemata illa Regiomõtani Geometrice construã, quæ vt ab alijs dignoscantur, erunt in margine notata, reliqua verò partim à Clauio, & Griembergerio, quorum in Mathematicis disciplinis præstantiam nemo non nouit, nemo non admiratur, partim à Iacobo Restio, cuius breui aliquid illucescet ingenij, mihi proposita fuerunt ad construendum, partim à me ipso excogitata.

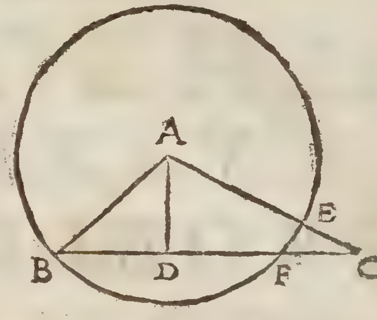
Perpendicularis trianguli vocatur ea recta linea, quæ ab angulo verticis cadit in basim ad rectos angulos.

Segmenta basis dicuntur ea quæ fiunt à perpendiculari.

LEMMA I.

DIFFERENTIA *segmentorum basis trianguli maior est quam laterum differentia.*

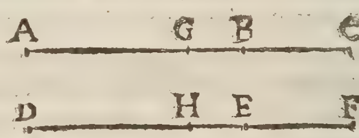
Exponatur enim triangulum ABC, in quo perpendicularis AD secet basim in duo segmenta BD, DC, & centro A, interuallo



uallo AB, quod sit latus minus, describatur circulus B F E secans latus AC in E, basim verò BC in F, est igitur laterum A B, A C, differentia EC, differentia verò segmentorum BD, DC, ipsa FC sunt
3. Tertij. * enim B D, DF æquales, & quoniam AC ad centrum pertingit,
8. Tertij. ipsius pars exterior EC minima * erit incidentium circulo ab eodẽ C puncto; quare FC differentia segmentorum basis, maior erit quam EC, differentia laterum, quod erat ostendendum.

LEMMA II.

SI duo rectangula fuerint æqualia, fuerint autem & quadrata laterum primi, æqualia quadratis laterum secundi, latera primi lateribus secundi æqualia erunt, maius videlicet maiori, minus minori.



Sit rectangulum A B C æquale rectangulo DEF, & quadrata A B, BC, simul sumpta æqualia *quadratis DE EF simul sumptis. Dico rectas A B, B C rectis D E EF æquales esse, maiorem videlicet maiori, minorem minori. Quoniam enim quadrata A B, BC æqualia sunt quadratis DE, EF, & rectangulum ABC æquale rectangulo DEF, quadrata AB, BC, vnà cum rectangulo ABC æqualia erunt quadratis D E, E F, vnà cum rectangulo D E F, duplicentur rectangula ABC, DEF, quadrata igitur AB, BC, vnà
4 Secũdi cum duplo rectanguli A B C hoc est * quadratum A C, æquale
4. Secũdi. erit quadratis DE EF, vnà cum duplo rectanguli DEF, hoc * est quadrato DF, quare & recta AC æqualis erit rectæ DF. Iam secentur ipsæ AC, DF, bifariam in G, & H, erunt igitur AG, DH,
5. Secũdi. æquales, & æqualia quoque earum quadrata, sed quadratum * AG æquale est rectangulo ABC, vnà cum quadrato GB, & qua
5. Secũdi. dratum * DH æquale rectangulo DEF, vnà cum quadrato HE, rectangulum igitur A B C, vnà cum quadrato G B æquale erit

rectan-

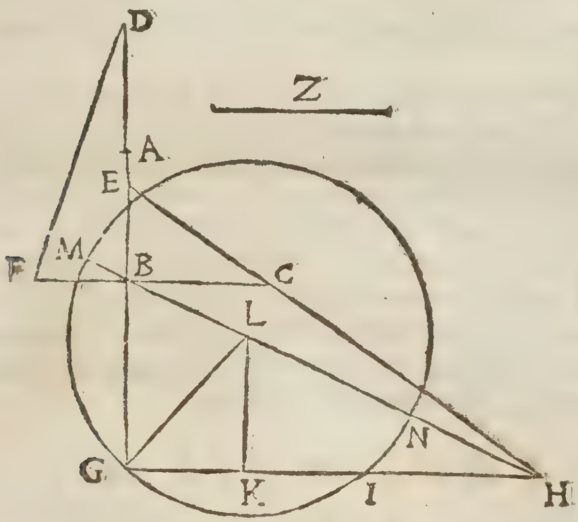
rectangulo DEF, vnà cum quadrato HE, auferantur æqualia rectangula ABC, DEF, reliquum igitur quadratum GB, reliquo quadrato HE æquale erit, vnde & recta GB æqualis rectæ HE, quare per additionem, & subductionem æqualium æqualibus, erit AB æqualis DE, & reliqua BC æqualis reliquæ EF, quod erat ostendendum.

Problema I.

DATA perpendiculari, differentia laterum trianguli, & differentia segmentorum basis, inuenire triangulum.

Sit data perpendicularis trianguli AB, differentia laterum BC, & differẽtia segmentorum basis, Z. oportet inuenire triangulum. Inclinentur ad rectos angulos AB, BC, ipsaque BA duplicetur in D, & in ea ponatur CE æqualis Z, est autem ipsa Z ex antecedente, quod primo loco præmissum est Lẽmate, maior quam BC, deinde producatur CBIF, vt sit BF æqualis BE, & iungatur FD, & pducatẽ quoque AB in G, vt sit EG æqualis DF, ipsi autem BC parallela agatur GH, secãs EC continuatã in H, & in ea sumatur HI æqualis EC, reliqua verò IG secetur bifariam, & ad rectos angulos in K a recta linea KL æquali ipsi BA, & iungantur GL, LH, in triangulo igitur LGH perpendicularis LK æqualis est AB ex constructione, & IH differentia segmentorũ GK, KH æqualis EC, hoc est ipsi Z. Superest igitur, vt differentia la-

Prob. 23. lib secundi de triãgulis Regio montani.



terum

terum LG LH æquetur ipsi BC, id autem ita fiet manifestum.

Centro L, interuallo LG describatur circulus secans rectam HL continuatam in punctis M, N, differentia igitur laterum
3. Tertij. LG LH erit NH, & circulus MGN transibit per I, sunt * enim GK, KI æquales, & LK perpendicularis est ipsi GI.

Quoniam igitur MH secta est in N, quadrata MH, HN æqua-
7. Secũdi. lia * erunt duplo rectanguli MHN, vnà cum quadrato MN, hoc est vnà cum quadruplo quadrati LG, diameter enim MN dupla est LG semidiametri, sed duplum rectanguli MHN æquale est duplo rectanguli GHI, & quadruplum quadrati LG, æquale quadruplo quadratorum GK, LK hoc est quadratis GI, DB, sunt enim GI, DB ipsarum GK, LK duplæ, ergo quadrata MH, HN æqualia erunt quadratis GI, DB, vnà cum duplo rectangu-
7. Secũdi. li GHI, sed quadratum GI vnà cum duplo rectanguli GHI, * æquale est quadratis GH, IH, hoc est GH, EC, quadrata igitũ MH, HN quadratis GH, EC, DB æqualia erunt, sed quadrato EC æqualia sũt quadrata EB, BC, hoc est FB, BC, ergo quadratis MH, NH, quadrata GH, DB, BC, FB ęqualia erunt, quadratis autẽ DB, FB ęquatur quadratum DF, hoc est EG, ergo quadrata MH, NH æqualia erunt quadratis GH, BC, EG, sed quadratis EG, GH æquatur quadratum EH, ergo quadratis MH, NH æqualia erunt quadrata EH, BC.

Et quoniam ratione parallelarum BC, GH, est vt EH ad GH, ita EC, idest IH ad BC: rectangulum EH BC sub extremis æquale erit rectangulo GHI sub medijs, hoc est rectangulo MHN, sed & quadrata EH, BC ostẽsa sunt ęqualia quadratis MH, NH, ergo ex antecedente, quod secundo loco præmissum est Lemmate, recta MH ipsi EH erit æqualis, & NH ipsi BC, quod erat ostendendum. Constructum est igitur triangulum LGH, in quo perpendicularis LK æqualis est AB, ipsa verò NH differentia laterum, æqualis BC, ac denique IH differentia segmentorum basis, æqualis Z, quod erat faciendum.

CONSECTARIVM.

Itaque erit vt recta, quę potest differentiam quadratorum ex differẽtijs laterum videlicet, & segmentorum basis, ad rectam, quæ potest quadratum perpendicularis duplæ, & prædictam quadratorum differentiam, ita differentia laterum ad basim, & ita differentia segmentorum basis ad laterum aggregatum.

Est enim vt EB ad EG, hoc est ad DF, ita BC, vel NH ad GH,

&

& ita EC,seu IH ad EH, hoc est ad MH,cui æqualis est composita ex GL,LH.

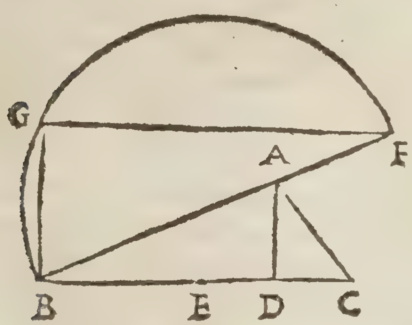
In numeris sit LK 20, NH 27, IH 33, erit GH 63, composita ex GL. LH 77, vnde LG 25, LH 52.

Est enim vt L 360, ad L 1960, idest vt L 9, ad L 49,seu 3, ad 7, ita 27, ad 63, & ita 33, ad 77.

LEMMA.

RECTA quæ potest quadratum compositæ ex lateribus trianguli,minus quadrato differentiæ segmentorum basis,maior est perpendiculari dupla.

Sit triangulum ABC,in quo perpendicularis A D, secet basim B C in duo segmenta inæqualia B D. DC,quorum differentia sit B E, & continuetur BA in F,longitudine A C, erit igitur BF compositæ ex lateribus B A, AC, æqualis,itaque in ipsa BF, describatur semicirculus BGF,in quo accõmodetur BG æqualis BE, & conectatur GF, recta igitur GF poterit quadratũ B F, compositæ ex lateribus,minus quadrato G B, hoc est BE differentiæ segmentorum basis : angulus enim BGF in semicirculo rectus est. Dico ipsam GF maiorem esse dupla perpendiculari AD. Quoniam enim quadratum BF constat quadratis B A, A F, & duplo rectanguli B A F, duplum verò rectanguli B A F, maius est duplo quadrati AD, nam vtraque ipsarum B A, AF maior est ipsa AD,quadrata quoque BA, AF simul maiora sunt duplo quadrati AD,pro quãtitate quadratorum BD, DC: quadratũ igitur BF quadruplo quadrati AD multo maius erit, quam pro quantitate quadratorum BD,DC,sed quadratũ BF maius est quadrato GF,pro quãtitate quadrati GB tantum,hoc est BE, ergo quadratum G F, maius erit quadruplo quadrati AD,

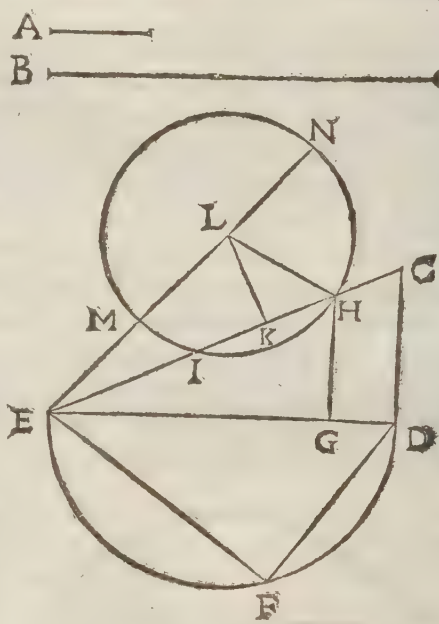


hoc est quadrato AD duplæ,quare & GF maior erit,quam AD dupla, quod erat ostendendum.

Problema II.

DATA perpendiculari, aggregato laterum trianguli, & differentia segmentorum basis, inuenire triangulum.

Sit data perpendicularis trianguli A, aggregatum laterum B, & differentia segmentorũ basis CD. Oportet inuenire triangulum: à puncto D, ipsi CD ducatur perpendicularis DE, & in ea ponatur CE æqualis ipsi B, & describatur semicirculus EFD, in quo accõmodetur D F, ęqualis duplę ipsius A, hoc autem fieri potest, nam ex antecedẽte Lemmate, ED maior est quam A dupla, conectatur igitur EF, cui ęqualis ponatur EG, ipsi autem D C parallela agatur GH, secans EC in H, & ponatur EI æqualis CD, reliqua verò IH secetur bifariam, & ad rectos angulos in K à recta KL æquali ipsi A, & conectantur E L, LH, & centro L, interuallo L H, describat circulus H M N, secans EL productã in punctis M, N. Quoniam igitur ex L centro cadit in IH perpendicularis LK secans ipsam IH bifariam, circulus cuius centrum L transiens per H, transibit & per I. Et quoniam secta est EN in M,



7. Secũdi. quadrata EM, EN * æqualia erunt duplo rectanguli MEN, vnà cum quadrato MN, hoc est cum quadruplo quadrati LH, diameter enim MN dupla est LH semidiametri, sed duplum rectanguli MEN æquale est duplo rectanguli I E H, & quadruplum quadrati LH æquale quadruplo quadratorum L K KH hoc est quadratis D F, I H, sunt enim DF, IH ipsarum LK, KH duplæ

duplæ, ergo quadrata EM, EN æqualia erunt quadratis DF, IH, vna cum duplo rectanguli IEH: quadrato autem I H, vnà cum duplo rectanguli IEH, * æqualia sunt quadrata E I, E H, hoc est CD, E H, quadratis igitur EM, EN, quadrata D F, E H, C D æqualia erunt, sed quadrato EH æqualia sunt quadrata HG, EG, hoc est H G, E F, ergo quadratis E M, EN æqualia erunt quadrata DF, C D, H G, E F, at quadrata DF, EF æqualia sunt quadrato E D, quadrata igitur E M, E N æqualia erunt quadratis ED, C D, H G, sed quadrata E D, CD quadrato EC sunt æqualia, ergo quadrata EM, EN quadratis HG, EC, æqualia erunt. 7. Secũdi.

Et quoniam propter parallelas CD, HG est EH, ad HG sicut E C, ad CD, hoc est ad EI, rectangulum IEH sub extremis, hoc est M E N æquale erit rectangulo E C, H G sub medijs, sed & quadrata EM, EN ostensa sunt æqualia quadratis HG, E C, ergo ex Lemmate 2, quod primo Problemati præmissum est, recta EM æqualis erit ipsi HG, & EN composita videlicet ex lateribus EL, LH æqualis EC, hoc est ipsi B, est autem & perpendicularis LK æqualis ipsi A ex constructione, & EI differentia segmentorum EK, KH, æqualis C D. Constructum est igitur triangulum ELH, quale construendum proponebatur.

CONSECTARIVM.

Itaque erit vt recta quæ potest quadratum compositæ ex lateribus trianguli, minus quadrato differentiæ segmentorũ basis, ad rectam quæ potest quadratum prædictæ compositæ, minus quadratis, quæ fiunt ex differentia segmentorum basis, & perpendiculari dupla, ita composita ex lateribus ad basim, & ita differentia segmentorum basis ad laterum differentiam.

Est enim vt ED ad E G, hoc est ad E F, ita EC, vel E N, cui æqualis est composita ex E L, L H, ad E H, & ita CD hoc est E I, ad HG, hoc est ad E M.

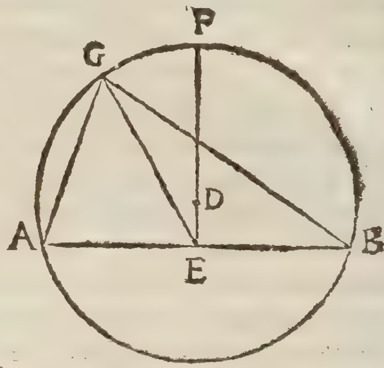
Sit LK 20, cõposita ex EL, LH 77, EI 33, erit EH 63, EM 27, vnde EL 52, LH 25.

Est enim vt L 4840, ad L 3240, idest vt L 121, ad L 81, seu quod idem est vt 11, ad 9, ita 77, ad 63, & ita 33, ad 27.

LEMMA

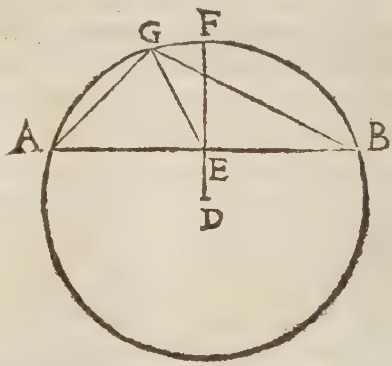
Si ab angulo verticis trianguli ducta recta linea secuerit bifariam basim, & angulus verticis fuerit acutus, illa recta linea

ſecans maior erit quam dimidia baſis, non autem quam pars diametri circuli circa triangulum deſcripti, ea ſcilicet quæ in portione in qua eſt triangulum, comprehenditur. Si verò angulus verticis fuerit obtuſus, illa ſecans minor erit dimidia baſe, non autem prædicta diametri parte.



Cadat ab angulo verticis triã-guli AGB recta linea GE ſecãs baſim AB bifariam in E, & circa triangulum A G B circulus deſcribatur, cuius centrum ſit D, & iuncta ED producatur ad circumferentiam in F. Dico exiſtente angulo A G B acuto, ipſam GE maiorem eſſe quam AE, non autem quam EF. Contrà verò exiſtẽte angulo A G B obtuſo, ipſam GE minorem eſſe quam AE, non autem quam EF. Sit primum angulus AGB acutus, ergo portio circuli AGB

7. Tertij. maior erit ſemicirculo, & centrũ erit inter E, F, maior * igitur erit EG quam AE, minor verò quam EF, pars videlicet diametri circuli, quæ in portione A G B comprehenditur. Si verò punctum G ſit idem quod F, erit G E æqualis ipſi FE, immo eadem, non autem maior.



Deinde ſit angulus AGB obtuſus, erit igitur portio circuli A G B minor ſemicirculo, & centrum D erit extra lineã FE,

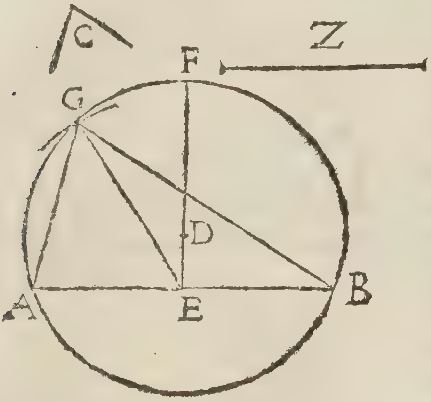
7. Tertij. itaque GE * minor erit quam AE, maior verò quam F E, at ſi punctum G fuerit idem quod F, erit GE æqualis ipſi FE, immo eadem, non autem minor, quare conſtat propoſitum.

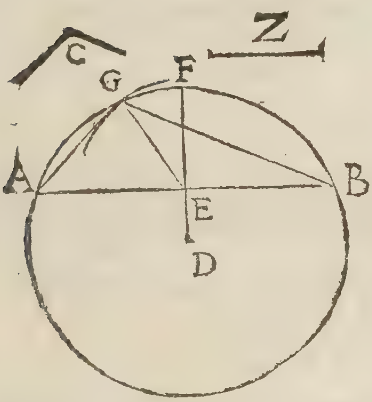
Problema III.

29. lib. 1. de triangulis Regiomõtãi. *DATA baſe trianguli, & angulo verticis, dataque recta linea, quæ à dato angulo ducta ſecat baſim bifariam, inuenire triangulum.*

Sit

Sit data basis trianguli AB, datus quoq; angulus ad verticem æqualis angulo C, ac data denique recta linea, quæ à dato angulo ducta secat basim bifariam, sit Z, oportet inuenire triangulum. Secetur AB bifariam in E, & in ea describatur portio circuli AGB, quæ suscipiat angulum æqualem angulo C, & per punctum E, & centrũ circuli, quod sit D, ducatur recta linea EDF vsque ad circumferentiam portionis. Si igitur angulus C fuerit acutus, ex antecedente Lemmate erit Z, maior quam AE, non autem quã FE, si verò obtusus, ipsa Z minor erit quam AE, non autem quam FE, quocunque igitur casu circulus descriptus ex E centro ad interuallum rectę Z æquale, secabit, vel tanget portionem circuli AGB, describatur, & secet, vel tangat in G, & iungantur AG, GB, GE, trianguli igitur AGB, angulus AGB ad verticem æqualis est angulo C: portio enim circuli AGB suscipit angulum æqualem ipsi C, est autem & basis ipsa AB data, & GE secãs ipsam basim bifariam, æqualis est Z datæ, quare factum est quod oportebat.





At verò si datus angulus C fuerit rectus, oportebit datam Z, æqualem esse dimidiæ basi AB, & omne triangulum rectangulum supra basim AB constitutum problema efficiet.

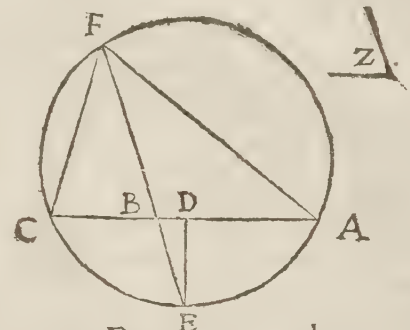
Problema IV.

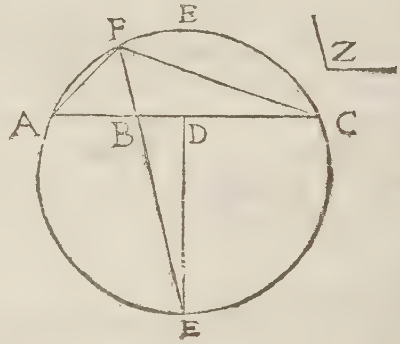
SECET recta linea angulum ad verticem trianguli bifariam, & cadat in basim non ad rectos angulos. Da- 33. lib. 2. de trian. Reg. non tant.

tis portio-

tis portionibus basis, & angulo, quem ipsa linea cum base constituit, inuenire triangulum.

Sint datæ portiones basis A B, B C, angulus autem quem linea secans cum ipsa base constituit, sit æqualis angulo Z. Oportet inuenire triangulum, ponãtur in directum AB, B C, & secetur AC bifariã in D perpendiculariter à recta D E, & fiat angulo Z æqualis angulus CBF, & producta FB occurrat rectæ DE in E, & per puncta AEC, circulus describatur, quem secet recta BF in F, & iungantur AF, F C. Quoniam igitur DE secat AC bifariã, & ad rectos angulos, erunt circumferentię AE, EC æquales; quare & anguli AFE, EFC æqualibus circumferentiis insistentes erunt æquales, recta igitur FB secat angulũ A F C aduerticẽ trianguli AFC bifariam, est autem & angulus CBF æqualis angulo Z ex constructione, & portiones basis A B, B C, sunt ipsæ datæ. Constructum est igitur triangulũ AFC, quale construendum proponebatur.

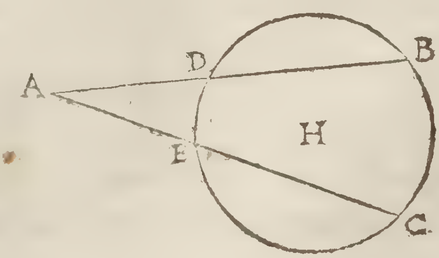




LEMMA I.

SI duæ rectæ lineæ circulum secent, & extra ipsum conueniant, erit prima ad secundum, sicut pars exterior secundæ ad partem exteriorem primæ.

Secent circulum sub centro H descriptũ, duæ lineę rectæ AB, AC, & extra ipsum conueniant in A, & sint partes exteriores ipsarum A D, AE. Dico esse AB ad AC sicut AE ad AD. Quoniam enim rectangulum BAD æ-



quale

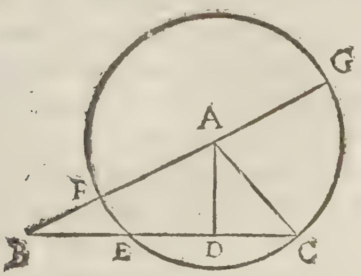
quale est rectangulo CAE, erit AB, ad AC, sicut AE ad AD, quod erat ostendendum.

LEMMA II.

SI basis trianguli fuerit latere maiori maior, dupla laterum differentia, differentiam segmentorum basis excedet.

Sit triangulum ABC, cuius basis BC sit maior latere maiori AB, & centro A, interuallo AC, describatur circulus CEF, secans latus AB productum in punctis F, G, basim verò BC in E, & cadat in BC perpendicularis AD, erit igitur laterum AB, AC differentia BF, differentia verò segmentorum BD, DC ipsa BE, æquales * enim sunt ED, DC, Dico duplam BF maiorem esse ipsa BE. Quoniam enim BC maior ponitur quam BA, erit dupla BC maior quam dupla BA, & consequenter multo maior quam BG. Et quoniam ex antecedente Lemmate est vt BC, ad BG, ita BF ad BE, duplatis antecedentibus, erit vt dupla BC, ad BG, ita BF dupla ad BE, sed dupla BC maior ponitur quam BG, ergo & BF dupla maior erit quam BE, quod erat demonstrandum.

3. Tertij.



Problema V.

DATA differentia laterum trianguli, & differentia segmentorum basis, datoque excessu inter latus maius, & basim, inuenire triangulum.

Sit data differentia laterum trianguli AB, differentia segmentorum basis Z, & excessus inter latus maius, & basim, AE. Oportet inuenire triangulum. Duplicentur AB AE, hæc in M, illa in C, & sit primũ excessus penes basim, ergo ex antecedente quod secundo loco præmissum est Lemmate, erit AC maior quam Z, ab ipsa igitur AC auferatur CD ęqualis Z, & fiat vt AD

ad

ad D C, ita MB ad BG, maior igitur erit BG quam BM, quia & DC maior est quam AD : auferantur æquales B C, BA, reliqua igitur CG maior erit quam reliqua MA & cum secetur CG bifariam in L, erit quoque LG maior quã EA, in ipsa igitur LG



sumatur LF æqualis E A, & centro L, interuallo L C, vel LG, describatur circulus CIG. Similiter & centro B, interuallo BF, alius circulus describatur secans priorem in I, & conectantur BI, LI, ipsam autem BI secet circulus CIG in H, perpendicularis verò LK, in K. Quoniam igitur A B, B C, sunt æquales ex constructione, & æquales quoque C L, LG, erit AG ipsius BL dupla, & quoniam BI superat ipsam BL, excessu LF, hoc est AE, superabit BI dupla duplam BL, hoc est ipsam AG, excessu AE duplo, hoc est excessu A M, quare MG ipsius BI dupla erit. Et quoniam est vt AD ad DC, ita MB ad BG, erit componendo, vt AC hoc est vt BC dupla ad DC, ita MG hoc est BI dupla ad BG, & subduplatis antecedentibus, erit vt BC, ad DC, ita BI ad BG, sed vt BI ad BG, ita est BC ad BH, ergo vt BC ad DC, ita erit BC ad BH, æqualis igitur erit BH differentia segmentorum BK, KI, ipsi DC, hoc est Z datæ, est autem & BC differentia laterũ B L, LI, æqualis ipsi AB ex constructione, & excessus LF, quo basis BI superat latus maius BL, æqualis EA datæ. Constructum est igitur triangulum BLI, quale construendum proponebatur.

CONSECTARIVM.

Itaque erit vt excessus, quo dupla differentia laterum trianguli superat differentiam segmentorum basis, ad compositam ex differentia laterum, & duplo excessu, quo basis latus maius excedit, ita differentia segmentorum basis ad aggregatum laterum, & ita differentia laterum ad basim.

Cum enim sit AD ad DC, sicut MB ad BG, erit permutando, vt AD ad M B, ita DC hoc est BH ad B G, & consequenter ita BC ad BI, est enim BC ad BI, sicut BH ad BG.

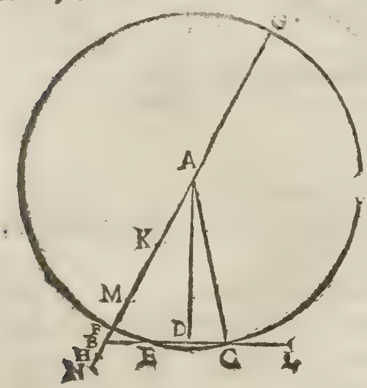
Sit

Sit BC 12, BH 16, LF 4, erit BG: hoc est composita ex lateribus BL, LI 40, basis verò BI 30, vnde BL 26, LI 14.

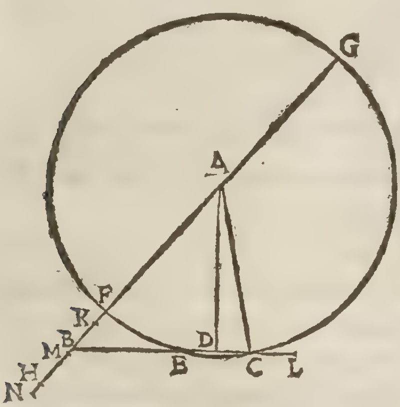
Est enim vt 8, ad 20, ita 16, ad 40, & ita 12, ad 30.

Si verò excessus fuerit penes latus.

Erit vt excessus inter differentiam segmẽtorum basis, & duplam differentiam laterum trianguli, ad excessum inter differentiam laterum, & duplum excessum quo latus maius superat basim, ita differentia segmentorum basis, ad aggregatum laterum, & ita differentia laterum ab basim.



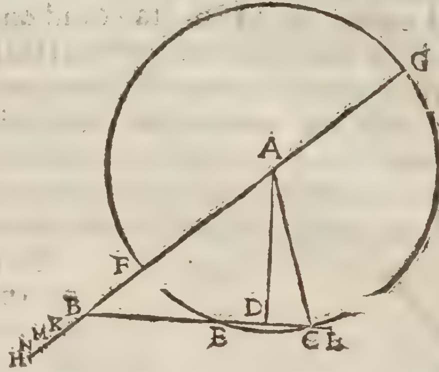
Sit enim triangulum ABC, in quo perpendicularis AD. secet basim BC in duo segmenta BD, DC, & latus AB, quod sit maius latere AC excedat basim BC; & centro A interuallo AC describatur circulus secans basim BC in E, latus verò BA productum in punctis F, G, erit igitur laterũ AB, AC differentia FB: differentia verò segmentorum BD, DC, ipsa BE. Duplicetur FB in H. & producatur BC in L, vt sit CL excessus, quo BA ipsam BC superat, cui excessui sumantur HM, MK æquales, & sumatur quoque FN, æqualis BE. Dico vt NH, ad BK, ita esse BE, ad BG, & ita BF, ad BC. Quoniam enim HB, BF sunt æquales ex constructione, & æquales quoque FA, AG, erit HG ipsius AB dupla, & quoniam BA superat basim BC excessu CL: hoc est HM, superabit HG duplam BC excessu HM duplo, hoc est excessu HK, ergo KG ipsius BC dupla erit.



Et quoniã est * vt BF, ad BE, ita BC, ad BG, duplatis antecedentibus, erit vt HF ad BE, hoc est ad FN, ita KG ad BG, & diuidendo, vt NH ad NF, ita BK, ad BG, ac denique permutando, erit vt NH ad BK, ita NF, hoc est BE, ad BG, quod estò primum. *Ex ant. 1 Lem.*

Quoniam igitur est vt NH, ad BK, ita BE, ad BG, vt autẽ BE,

ad BG, ita BF ad BC, erit vt NH, ad BK, ita BF, ad BC, quod secundo loco erat demonstrandum.



Sit BF 4, BE 10, CL 5, erit BG composita ex lateribus BA, AC 30, basis verò BC 12, vnde AB 17, AC 13.

Est enim vt 2, ad 6, ita 10, ad 30, & ita 4, ad 12.

Rursus sit BF 5, BE 11, CL 4, erit composita ex lateribus BA, AC 33, basis verò BC 15, vnde AB 19, AC 14.

Est enim vt 1, ad 3, ita 11, ad 33, & ita 5, ad 15.

Sit denique BF 6. BE 10. CL 1, erit aggregatum laterum BA, AC 20, basis verò BC 12, vnde AB 13, AC 7.

Est enim vt 2, ad 4, ita 10. ad 20, & ita 6, ad 12.

Quod si nullus fuerit excessus inter duplam differentiam laterum trianguli, & differentiam segmentorum basis (hoc autem accidit, quando segmentorum differentia dupla est differentiæ laterum) non vnum triangulum problemati satisfaciet, sed infinita: construi enim possunt infinita triangula, vt quæ sunt differentiæ in vno, eædem sint in omnibus, sed priusquam huiusmodi constructionem exhibeamus, sequens Lemma demonstrabimus.

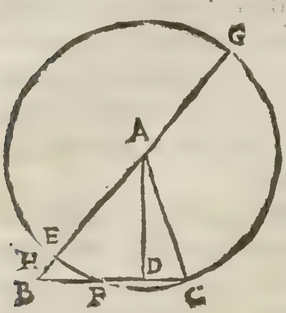
LEMMA

Si differentia segmentorum basis trianguli fuerit dupla differentiæ laterum, latus maius excedit basim, excessu dimidiæ laterum differentiæ æquali.

Sit triangulum ABC, in quo perpendicularis AD, secet basim BC in duo segmenta BD, DC; & centro A, interuallo AC, quod sit minus latus, describatur circulus secans basim BC, in F, latus verò AB productum in punctis E, G, erit igitur laterum AB, AC differentia BE, differentia verò segmentorum BD, DC, ipsa BF, sunt * enim FD, DC æquales, sit autem BF dupla ipsius BE. Dico latus AB excedere basim BC, excessu dimidiæ BE, æ- *3. Tertij.*

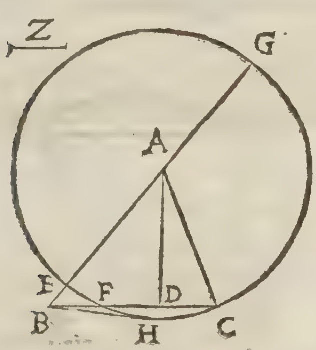
quali

quali, secetur enim BE bifariam in H. Quoniam igitur BF ponitur dupla ipsius BE, & est vt BF, ad BE, ita BG, ad BC, erit quoque BG, dupla ipsius BC, & quoniam GE dupla est ipsius AE, & BE dupla ipsius EH, tota GB ipsius AH dupla erit: æqualis igitur erit AH, ipsi BC, ergo AB superabit ipsam BC, excessu HB, sed HB est dimidia ipsius BE, ergo latus AB excedet, basim BC excessu æquali dimidiæ BE, quod erat demonstrandum,



Constructio prædicti casus, in quo nullus est excessus inter duplam differentiam laterum trianguli, & differentiam segmentorum basis.

Sit igitur data differentia laterum BE, differentia segmentorum basis Z, quæ sit dupla ipsius BE, ergo ex antecedente Lemmate latus maius trianguli excedet basim, & excessus æqualis erit dimidiæ BE, his igitur datis. Oportet inuenire triangulum, Producatur BE, ad quodcunque punctum G, ea tamen cautione, vt BG sit maior quam quadrupla B E, & circa diametrum EG describatur circulus cuiuscentrum A, ipsumque circulum tangat recta linea BH, in H. Quoniam igitur BG posita est maior quã BE quadrupla, rectangulum E B G, hoc est quadratum BH maius erit quadruplo quadrati BE, hoc est quadrato Z: est enim Z, quadratum quadruplum quadrati BE, quia Z, dupla ponitur ipsius BE, ergo & BH maior erit quam Z, si igitur centro B interuallo rectæ Z æquali circulus describatur, secabit circumferentiam circuli sub A centro descripti, inter puncta E, H, describatur, & secet in F, & iuncta BF producatur in C, & iungatur quoque AC, & in BC ducatur perpendicularis AD, erit igitur segmentorũ BD DC, differentia BF, laterum verò AB, AC, differentia BE, est autem BF æqualis Z ex constructione, & BE ipsa data, & quoniam BF dupla est ipsius BE ex antecedente Lẽmate, trianguli ABC latus AB excedet basim BC, dimidia BE. Constructũ est igitur triangulum ABC, &c. quod faciendum erat.



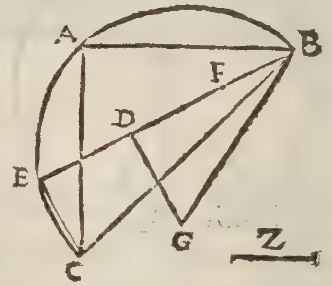
CONSECTARIVM.

Constat igitur infinita triangula construi posse, ita vt differentiæ laterum & segmentorum existentes in ratione dupla, sint in omnibus eædem, atque latera maiora excedant bases, vno eodemque excessu, dimidia videlicet laterum differentia rectæ enim BG compositæ ex lateribus BA, AC terminus G, non est præfinitus: illa enim potest esse, & maior & minor, requiritur tantum vt quadruplam BE, excedat.

Sit BE 2, BF 4, latus AB excedet basim BC, & excessus erit nempe dimidia BE, composita verò ex lateribus BA, AC, potest esse 9 10, 11, 12, vel etiam maior, solum requiritur, vt superet numerum 8, nempe quadruplam BE. Similiter & basis BC potest esse 5, 6, 7, 8, vel cuiuscunque longitudinis ipsa 4, maioris.

Problema VI.

DATA base trianguli angulum rectum subtendente, & differentia laterum, inuenire triangulum.



Sit data basis trianguli angulũ rectum subtendens AB, differentia laterum Z. Oportet inuenire triangulum. Ducatur ipsi AB perpendicularis, & æqualis AC, & iuncta BC fiat diameter circuli, eius igitur circumferentia transibit per A, in ipso autem circulo CAB accommodetur CE æqualis ipsi Z, & iungatur EB, & in ea sumatur BF æqualis EC, vel Z, reliqua EF secetur bifariam in D perpendiculariter à recta DG, æquali ipsi DE, vel DF, & iungatur BG, erit igitur laterum DB, DG trianguli DBG differentia FB hoc est Z data.

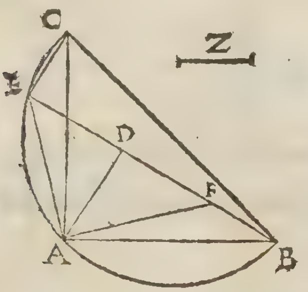
Et quoniam rectus est angulus CEB, in semicirculo, quadratum CB, æquale erit quadratis EB, EC, hoc est EB, FB, sed quadrata EB, * FB, dupla sunt quadratorum ED, DB, hoc est DG, DB, ergo quadratum CB duplum erit quadratorum DG, DB, sed duplum est & quadrati AB, ergo quadratum AB, æquale erit

10. Secũdi

erit

eritquadratis DB, DG, hoc est quadrato GB, quare & recta AB æqualis rectæ GB. Constructum est igitur triangulum DBG rectangulum in D, cuius laterum DB, DG differentia FB, æqualis est Z datæ, & basis GB angulum rectum subtendens æqualis ipsi AB, quod erat faciendum.

ALITER. Ducatur, vt prius ipsi AB perpendicularis, & æqualis AC, & iuncta CB fiat diameter circuli, in quo accommodetur CE æqualis Z, & iungatur EB, cui perpendicularis agatur AD, ipsi autem ED ponatur æqualis DF, & iungantur AE, AF. Quoniam igitur anguli AEB, ACB in eadem portione circuli existentes sunt interse æquales, & est semirectus ACB, erit & AEB semirectus: angulus autem EDA rectus est ex constructione reliquus igit DAE semirectus erit: tres enim interni anguli trianguli EDA duob. rectis sunt equales, angulus igitur AED angulo EAD equalis erit, quare & latus DA lateri DE, vel DF, vnde laterum DA, DB differentia erit FB. Et quoniam latera DE, DA trianguli EDA æqualia sunt lateribus AD, DF trianguli ADF, vtrunque vtrique, & anguli ad D æquales, nempe recti, erunt ipsa triangula æqualium laterum, & angulorum, latus igitur AF, lateri AE æquale erit, & angulus DAF æqualis angulo DAE, sed ostensus est semisectus DAE, ergo & DAF semirectus erit, atque adeo totus angulus EAF rectus erit, & ideo æqualis recto CAB, ablato communi angulo CAF, reliquus igitur FAB reliquo EAC erit æqualis, sunt autem & latera AF, AB trianguli AFB æqualia lateribus AE, AC trianguli AEC, vtrunque vtrique, ergo & basis FB, basi EC, hoc est ipsi Z æqualis erit. Ad datam igitur basim AB constitutum est triangulum ADB, cuius laterum DA, DB differentia FB æqualis est Z, datæ, quod erat faciendum. 10. secundi.



CONSECTARIVM.

Itaque excessus, quo duplum quadrati à base subtendente angulum rectum trianguli, superat quadratum differentiæ laterum, æqualis est quadrato aggregati laterum.

Excessus enim quo duplum quadrati AB superat quadratum FB,

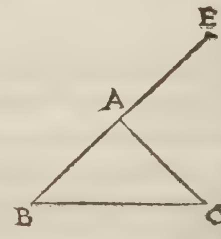
FB, hoc eſt exceſſus, quo quadratum CB ſuperat quadratũ CE, eſt ipſum quadratum EB, compoſitæ videlicet ex lateribus, AD, DB.

Sit AB 10, FB 2, erit compoſita ex AD, DB 14, vnde DA 6, DB 8.

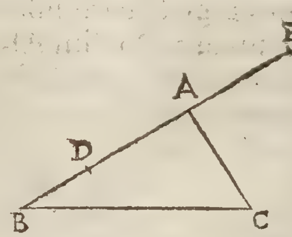
Duplum enim quadrati ex 10, eſt 200, quadratum verò ex 2, eſt 4, exceſſus, igitur erit 196, pro quadrato compoſitæ ex lateribus AD, DB, vnde radix quadrata numeri 196, quæ eſt 14, erit ipſa compoſita.

LEMMA.

RECTA linea, quæ poteſt duplum quadrati ex baſe ſubtendente angulum rectum trianguli, non eſt minor aggregato laterum.



Sit triangulum ABC rectangulum in A, cuius baſis BC. Dico rectam, quæ poteſt duplum quadrati BC, nõ eſſe minorem aggregato laterũ AB, AC, Producatur enim BA in E, vt ſit AE æqualis AC, ſi igitur latera AB, AC ſint æqualia, erit EB dupla ipſius AB, & ideo quadratum EB, quadruplũ erit quadrati AB, ſed quadruplum quadrati AB æquale eſt duplo quadrati BC, ergo quadratum EB duplo quadrati BC æquale erit, & conſequenter recta, quę poteſt duplum quadrati BC ipſi EB aggregato laterum AB, AC, erit æqualis, non autem minor.



Si verò latera AB, AC non ſint æqualia erit alterum altero maius, ſit maius AB, & ex eo abſcindatur AD æqualis AC, vel AE. Quoniam igitur quadrata BE, BD * æqualia ſunt duplo quadratorum BA, AE, hoc eſt duplo quadrati BC, duplum quadrati BC, maius erit quadrato BE tantum, & conſequenter recta, quæ poteſt duplum quadrati BC, maior ipſa BE, hoc eſt aggregato laterum AB, AC, non autem minor. Quocunque igitur caſu recta, quæ poteſt duplũ quadrati ex baſe ſubtendente

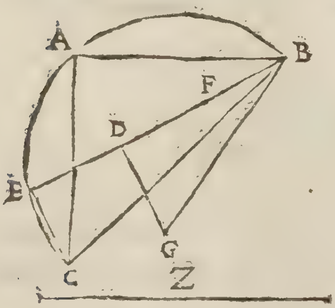
10. Secũdi

te

re angulum rectum trianguli non est minor aggregato laterũ, quod erat ostendendum.

Problema VII.

DATA base trianguli angulum rectum subtendente, & aggregato laterum, inuenire triangulum.

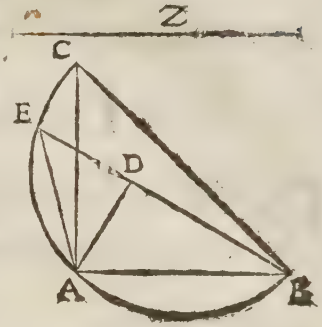


Sit data basis trianguli angulũ rectum subtendens AB, aggregatum laterum Z, oportet inuenire triangulum. Ducatur ipsi AB perpendicularis, & æqualis AC, & iuncta CB fiat diameter circuli, ipsa igitur CB ex antedente Lemmate, non erit minor quam Z, ideoque in circulo, circa diametrum CB descripto poterit aptari recta linea ipsi Z æqualis, aptetur & sit BE, & iungatur EC, cui æqualis ponatur BF, reliqua EF secetur bifariam in D perpendiculariter à recta DG, æquali ipsi DF, vel DE, & iungatur BG, erit igitur EB, hoc est Z æqualis aggregato laterum DB, DG. Et quoniam rectus est angulus CEB in semicirculo, quadratum CB æquale erit quadratis EB, EC, hoc est EB, FB, sed quadrata EB, FB * dupla sunt quadratorum ED, DB, hoc est DG, DB, ergo quadratum CB duplum erit quadratorum DG, DB, sed duplum est & quadrati AB, ergo quadratum AB æquale erit quadratis DB, DG, hoc est quadrato GB; quare & recta AB æqualis rectæ GB. Constructum est igitur triangulum DBG rectangulum in D, cuius aggregatum laterum DB DG æquale est Z datæ, & basis GB angulum rectum subtendens æqualis ipsi AB, quod erat faciendum. 10. Secundi.

ALITER Ducatur vt prius ipsi AB perpendicularis, & æqualis AC, & iuncta CB fiat diameter circuli, in quo accommodetur BE æqualis Z, diameter enim CB ostensa est non minor quam Z, ipsi autem EB ducatur perpendicularis AD, & iungatur AE. Quoniam igitur æquales sunt anguli ACB, AEB, sunt enim in eadem portione circuli, erit angulus AEB semirectus; quia semirectus est & ACB, sed rectus est angulus EDA, reliquus igitur DAE trianguli DAE, erit quoque semirectus,

omnis

omnis enim trianguli, tres interni anguli duobus rectis ſunt æquales, angulus igitur D A E angulo D E A æqualis erit, vnde & latus D E lateri D A erit ęquale, addita communi DB, compoſita igitur ex lateribus A D, D B æqualis erit ipſi EB, hoc eſt Z datę. Ad datam igitur baſim AB conſtitutum eſt triangulū DAB rectangulum in D, cuius aggregatum laterum DA, DB æquale eſt Z datæ, quod faciendum erat.



CONSECTARIVM.

Itaque exceſſus, quo duplum quadrati ex baſe ſubtendente angulum rectum trianguli ſuperat quadratum aggregati laterum, æqualis eſt quadrato differentiæ laterum.

Reſumpta enim primæ conſtructionis figura, exceſſus, quo duplum quadrati AB, hoc eſt quo quadratum CB ſuperat quadratum EB, eſt ipſum quadratum EC, hoc eſt FB differentiæ videlicet laterum DG DB.

Sit baſis GB 10, compoſita ex lateribus DG, DB 14, erit FB differentia laterum DG, DB 2, vnde DG 6, DB 8.

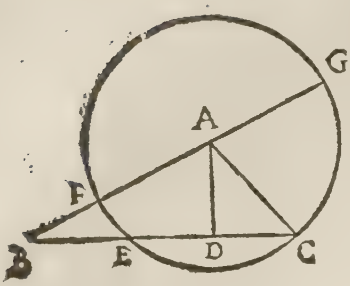
Duplum enim quadratum ex 10, eſt 200, quadratum verò ex 14, eſt 196, exceſſus igitur erit 4, pro quadrato differentiæ laterum DG, DB, vnde radix quadrata numeri 4, quæ eſt 2, erit ipſa differentia.

LEMMA.

DIFFERENTIA *ſegmentorum baſis trianguli ad differentiam laterum eãdem habet rationem quam aggregatum laterum ad baſim.*

Sit trangulum ABC, in quo perpendicularis AD ſecet baſim BC in duo ſegmenta BD, DC, & centro A, interuallo AC, quod ſit latus minus, deſcribatur circulus CEF ſecans baſim BC in E,

latus

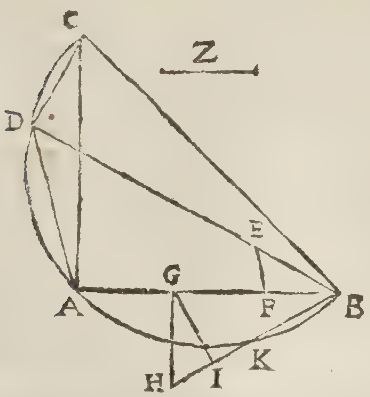


latus verò AB productum in punctis F, G, erit igitur laterum AB, AC differentia BF, aggregatum verò BG, atque differentia segmẽtorum BD, DC, erit BE: sunt enim æquales * ED, DC, Dico esse BE, ad BF sicut BG, ad BC: rectangulum enim EBC æquale est rectangulo FBG, quare constat propositum. *3 Tertij.*

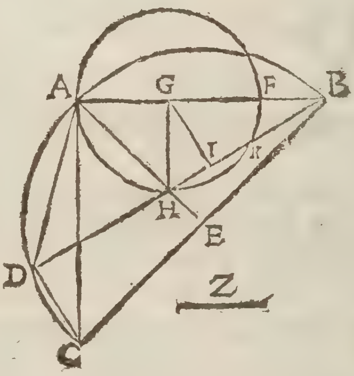
Problema VIII.

DATA differentia segmentorum basis subtendentis angulum rectum trianguli, & aggregato laterum, inuenire triangulum.

Sit data differentia segmentorum basis subtendentis angulum rectum trianguli Z, aggregatum autem laterum AB, Oportet inuenire triangulum. Ducatur ipsi AB perpendicularis, & æqualis AC, & iungatur CB, in eaque describatur semicirculus, eius igitur circumferentia transibit per A, in ipso autem semicirculo accõmodetur CD æqualis Z, & iungantur DB, DA, ipsi autem CD æqualis ponatur BE, & per E, ipsi DA parallela agatur EF, secans AB, in F, reliqua AF secetur bifariam, & ad rectos angulos in G, à recta GH æquali ipsi GA, vel GF, & iungatur HB. Quoniam igitur parallelæ sunt DA, EF ex constructione, erit vt DB, ad EB, ita AB ad FB, & vt quadratum DB ad quadratum EB, hoc est CD, ita quadratum AB ad FB quadratum, & componendo, erit vt summa quadratorum DB, DC, hoc est vt quadratum CB seu, quod idem est, vt duplum quadrati AB, ad quadratum EB, ita summa quadratorum AB, FB, hoc est * duplum quadratorum AG, GB, vel GH, GB, ad quadratum FB, & subduplaris antece- *10 Secundi.*



dentibus, erit vt quadratum AB ad quadratum EB, ita summa quadratorum GH, GB, hoc est quadratum HB, ad FB quadratum, vnde vt AB ad EB, ita erit HB ad FB, & permutando, vt AB ad HB, ita EB ad FB. Iam agatur GI perpendicularis ad HB, & ipsi HI æqualis ponatur IK, differentia igitur segmentorum HI, IB, erit KB, & ideo ex antecedente Lemmate, erit vt AB ad HB, ita KB ad FB, sed ostensum est vt AB ad HB, ita esse EB ad FB, ergo vt KB ad FB, ita erit EB ad FB, æqualis igitur erit KB ipsi EB, hoc est Z datæ, est autem & composita ex lateribus HG, GB, æqualis ipsi AB; Constructum est igitur triangulum HGB rectangulum in G, cuius aggregatum laterum HG, GB, æquale est AB datæ, & KB differentia segmentorum HI, IB, æqualis ipsi Z, quod erat faciendum.



ALITER. Ducatur vt supra ipsi AB perpendicularis, & æqualis AC, & iuncta CB, fiat diameter circuli BAC, cuius centrum E, in ipso autem circulo accommodetur CD æqualis Z, & iungantur DB, AE, se mutuo secantes in H, & ex H ducatur ipsi AB perpendicularis HG. Quoniam igitur rectus est angulus AGH, & semirectus GAH, erit * quoque & reliquus GHA semirectus, & ideo ipsi GAH æqualis, vnde latus HG æquale erit lateri GA, addita communi GB, composita igitur ex lateribus HG, GB, erit æqualis ipsi AB.

32. Primi

Iam agatur GI perpendicularis ad HB, & centro G, interuallo GA, vel GH, describatur circulus AHF, secans DB in K, ipsam verò AB in F, & iungatur AK, differentia igitur segmentorum HI, IB, erit KB, sunt * enim æquales HI, IK. & quoniam angulus AGH ad centrum rectus est ex constructione, erit angulus AKH ad circumferentiam semirectus, sed semirectus est & angulus ADB, est enim æqualis semirecto ACB, cum vterque, eidem circumferentiæ AB insistat, ergo reliquus angulus DAK, trianguli DAK rectus erit, & ideo æqualis recto BAC, dempto communi angulo CAK, reliquus DAC reliquo KAB æqualis erit, sed & latus AB æquale est lateri AC ex constructione, & latus AK æquale lateri AD ratione æqualium angulorum AKD, ADK, ergo & basis kB trianguli AKB, æqualis erit basi DC trianguli ADC; Constructum est igitur triangu-

3. Tertij.

lum

lum GHB rectangulum in G. cuius aggregatum laterum HG, GB, æquale est ipsi AB, & KB differentia segmentorum HI, IB, æqualis ipsi DC, hoc est Z datæ, quod erat faciendum.

* In hac figura ducenda est linea Ak.

CONSECTARIVM.

Itaque erit vt recta, quæ potest duplum quadrati aggregati laterum trianguli, minus quadrato differentiæ segmentorum basis ad aggregatum laterum, ita differentia segmentorum ad differentiam laterum, & ita aggregatum laterum ad basim.

Resumpta enim primę cōstructionis figura, est vt DB ad AB, ita EB, hoc est KB ad FB, & ita AB ad HB, est enim AB ad HB, sicut KB ad FB;

In figura secundæ cōstructionis, similia sunt triangula ABD, HBA, sunt enim anguli ADB, HAB æquales, ostensus est vterque semisectus, & angulus ad B communis vtrique, vt igitur DB ad AB, ita erit AB ad HB, & ita KB ad FB, est enim kB ad FB, sicut AB ad HB.

Sit kB 7, composita ex lateribus HG, GB 35, erit FB 5, HB 25, vnde GB 20, GH 15. Est enim vt L 2401, hoc est vt 49, ad 35, ita 7, ad 5, & ita 35, ad 25.

LEMMA

DIFFERENTIA segmentorum basis subtendentis angulum rectum trianguli, minor est quam recta, quæ potest duplum quadrati differentiæ laterum.



Sit triangulum ABC rectangulum in A, in quo perpendicularis AD, secet basim BC, in duo segmenta inæqualia, BD, DC, & centro A, interuallo AC, quod sit minus latus, describatur circulus CEF, secans basim BC in E, latus verò AB productum in punctis F, G, erit igitur laterum AB, AC differentia BF, differentia verò segmentorum BD, DC ipsa BE, sunt enim ED, DC, * æquales; Dico ipsam BE minorem esse quam recta quæ potest duplum qua- 3. Tertij

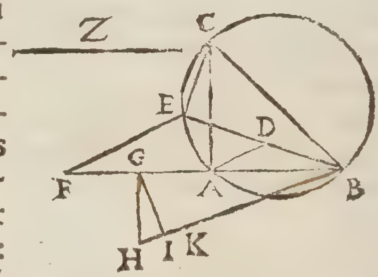
 drati

drati BF. Quoniam enim eſt BC ad BG, ſicut h [illegible] erit vt quadratum BC ad quadratum BG, ita BF quadratum ad quadratum BE, & duplatis antecedentibus, erit vt duplum quadrati BC ad quadratum BG, ita duplum quadrati BF ad quadratum

11 ſecunda parte Lem. ante Prob. 7. BE, ſed oſtenſum * eſt quadratum BG minus eſſe duplo quadrati BC, ergo & quadratum BE duplo quadrati BF minus erit, quare & recta BE minor erit quam recta, quæ poteſt duplum quadrati BF, quod erat demonſtrandum.

Problema IX.

DATA differentia ſegmentorum baſis ſubtendentis angulum rectum trianguli, & differentia laterum; inuenire triangulum.

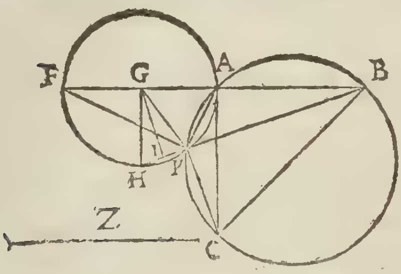


Sit data differentia ſegmentorũ baſis angulum rectum ſubtendentis Z, & differentia laterum AB. Oportet inuenire triangulum. Ponatur ipſi AB, æqualis & ad angulos rectos AC, & iuncta CB fiat diameter circuli, ex antecedente igitur Lemmate, CB maior eſt quam Z: ideoque in circulo circa diametrũ CB deſcripto, poterit aptari recta linea ipſi Z æqualis, aptetur, & ſit BE, & iungatur E C, cui æqualis ſumatur B D, & iungatur quoque DA, & ei parallela agatur EF, ſecans BA continuatam in F, & ſecetur FA bifariam in G, à perpendiculari GH æquali ipſi GA, vel GF, & iungatur HB: triangulum igitur GHB rectãgulum eſt in G, & differentia laterum GH, GB eſt ipſa AB data. Iam agatur ipſi HB perpendicularis GI, & ſumatur IK æqualis IH, Quoniam igitur parallelæ ſunt EF, DA ex conſtructione, erit vt DB, hoc eſt EC, ad EB, ita AB, ad FB, & vt quadratum EC ad quadratum EB, ita quadratum AB, ad FB quadratum, & componendo vt ſumma quadratorum EC, EB, hoc *

47. Primi eſt vt quadratum CB, ſeu quod idem eſt duplum quadrati AB, ad quadratum EB, ita erit ſumma quadratorum AB, FB, hoc *

10. Secũdi. eſt duplum quadratorum FG, GB, vel GH, GB ad quadratum FB, & ſubduplatis antecedentibus, erit vt quadratum AB, ad quadratum EB, ita ſumma quadratorum GH, GB, hoc eſt quadratum

dratum HB, ad FB quadratum: quare vt AB, ad EB, hoc est ad Z, ita erit HB, ad FB, sed vt HB, ad FB, ita est AB, ad KB, ergo vt AB ad Z, ita erit AB, ad KB, æquales igitur erunt KB, & Z. Constructum est igitur triangulum GHB rectangulum ad G, cuius laterum GH, GB differentia est ipsa AB data, & KB differentia segmentorum HI, IB æqualis datæ Z, quod facere oportebat.



ALITER Inclinentur, vt prius ad angulos rectos AB, AC æquales, & iuncta BC fiat diameter circuli, in quo accõmodetur ipsi Z ęqualis BK: est autem ex antecedente Lemmate diameter BC maior quã Z, & conectatur AK, cui perpẽdicularis ducatur kF. Quoniam igitur angulus FAk minor est recto FAC, & angulus AkF rectus, erunt ambo simul duobus rectis minores, quare coibunt rectæ BA, kF: coeant in F, & circa diametrum FA describatur circulus cuius centrum G, is igitur circulus transibit per k, quoniam rectus est angulus AkF. Deinde producatur Bk donec secet circulum AkF, in H: inferius autem demonstrabimus rectam Bk secare circulum, non autem contingere, & iuncta GH, ducatur ipsi HB perpendicularis GI. Quoniam igitur HI, Ik sunt æquales, differentia segmentorum HI, IB, erit kB, cui æqualis est Z data. Similiter differentia laterum GH, GB est ipsa AB data, superest igitur vt angulus HGB sit rectus, id autem ita fit manifestum.

Quoniam enim semirectus est angulus AkB (est enim æqualis semirecto ACB, vterque eidem circumferentiæ AB insistit) est autem AkF, rectus ex constructione, reliquus FkH semirectus erit: tres enim anguli AkB, AkF, FkH duobus rectis sunt æquales, & quoniam angulus FGH ad centrum duplus est anguli FkH ad circumferentiam, & est semirectus FkH, erit angulus FGH rectus, quare & HGB rectus quoque erit; Constructum est igitur triangulum GHB rectangulum in G, cuius laterum GH, GB differentia est ipsa AB data, & kB differentia segmentorum HI, IB æqualis ipsi Z, quod erat faciendum.

At verò rectam Bk secare circulum, ita demonstrabitur. Si enim non secat, tangit: tangat si possibile est, contactus igitur erit in k, & angulus GkB, erit rectus, sed semirectus est AkB,

quia

quia æqualis eſt ſemirecto A C B, ergo & reliquus AkG ſemirectus erit, ſed angulo AkG æqualis eſt angulus GAk, ratione æqualium laterum GA, Gk, ergo & ipſe GAk ſemirectus erit, ablato igitur ſemirecto angulo G A k à recto G A C, reliquus kAC erit ſemirectus, ſed ipſi kAC æqualis eſt kBC, ſunt enim in eadem portione circuli, ergo & ipſe kBC ſemirectus erit, quare ſemirecto ABC æqualis, quod eſt abſurdum; non igitur Bk tangit circulum, ſed ſecat, quod erat demonſtrandum.

CONSECTARIVM.

Itaque erit vt recta, quæ poteſt duplum quadrati differentiæ laterum trianguli minus quadrato differentiæ ſegmentorum baſis, ad differentiam laterum, ita differentia ſegmentorum ad aggregatum laterum, & ita differentia laterum ad baſim.

Reſumpta enim primæ conſtructionis figura, eſt vt D B, ad BA, ita EB ad BF, hoc eſt vt EC, ad BA, ita Bk, ad BF, & ita AB, ad BH, eſt * enim eadem ratio AB ad BH, quæ kB ad BF.

In ſecunda conſtructionis figura, iuncta k C, ſimilia erunt triangula A k C, F k B, nam angulus A C k æqualis eſt angulo A B k, quia in eadem ſunt portione circuli, & quoniam recti ſunt anguli CkB, AkF, hic ex conſtructione, ille ex vi ſemicirculi, & ideo æquales, addito communi angulo AkB, totus angulus AkC toti FkB æqualis erit, ac reliquus reliquo, vt igitur kC, ad CA, vel ad AB, ita erit kB ad FB, & ita AB, ad BH, eſt * enim AB ad BH, ſicut kB ad BF.

Ex Lem. in prob.8

Sit AB 91, kB 119, erit FB 221, HB 169, vnde GB 156, GH 65.

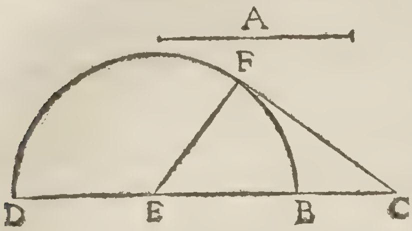
Eſt enim vt L 2401, hoc eſt vt 49, ad 91, ita 119, ad 221, & ita 91, ad 169.

Problema X.

DATO vno ex lateribus trianguli angulum rectum ambientibus, & differentia inter reliquum latus, & baſim, inuenire triangulum.

Sit

Sit datum vnum ex lateribus trianguli angulum rectum ambientibus A, data quoque differentia inter reliquum latus, & basim BC. Oportet inuenire triangulum. Fiat quadrato A æquale rectangulum BCD, & circa diametrum DB describatur circulus cuius centrum E, ipsum autem circulum contingat recta CF in F, & iungatur EF, erit igitur rectangulum BCD æquale quadrato FC, sed æquale est & quadrato A ex constructione, quadratum igitur FC quadrato A æquale erit, quare & recta FC æqualis rectæ A. Est autem * & angulus EFC rectus, & basis EC differt à latere EF per BC, æquales enim sunt EF, EB ex definitione circuli. Constructum est igitur triangulum EFC, quale construendum proponebatur. 18. Tertij



CONSECTARIVM.

Itaque, alterum ex duobus lateribus trianguli angulum rectum ambientibus medium est proportionale inter differentiam & aggregatum reliqui lateris, & basis.

Quoniam enim rectangulum BCD æquale est quadrato FC, erit vt BC ad FC, ita FC, ad DC.

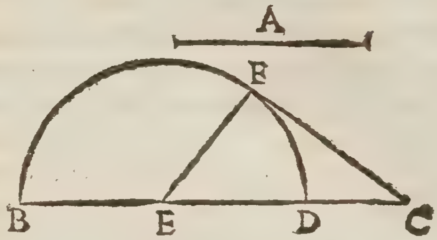
Sit FC 12, BC 6, erit DC 24, vnde EC 15, EF 9, Est enim vt 6, ad 12, ita 12, ad 24.

Problema XI.

DATO vno ex lateribus trianguli angulum rectum ambientibus, & aggregato reliqui lateris, & basis, inuenire triangulum.

Sit datum vnum ex lateribus trianguli angulum rectum ambientibus A, datum quoque aggregatum reliqui lateris, & basis BC, oportet inuenire triangulum. Secetur BC in D, vt rectangulum BCD sit æquale quadrato A, & circa diametrum BD circulus describatur cuius centrum E, à puncto autem C ducatur CF circulum contingens in F, & iungatur EF. Quoniam igitur CF contingit circulum in F, rectangulum BCD,

æquale



æquale erit quadrato FC, ſed æquale eſt & quadrato A, ex conſtructione, ergo quadratum FC quadrato A, æquale erit, vnde & recta FC æqualis erit rectæ A. Conſtructum eſt igitur triangulum EFC rectangulum in F, cuius latus FC æquale eſt ipſi A, & compoſita ex reliquo latere FE, & baſe EC æqualis BC datæ, quod erat faciendum.

CONSECTARIVM.

Itaque alterum ex duobus lateribus trianguli angulum rectum ambientibus medium eſt proportionale inter differentiam, & aggregatum reliqui lateris, & baſis.

Quoniam enim rectangulum BCD æquale eſt quadrato FC, erit vt BC, ad FC, ita FC, ad DC.

Sit FC 12, BC 24, erit DC 6, vnde EC 15, EF 9, Eſt enim vt 24, ad 12, ita 12, ad 6.

Sex Problemata proximè præcedentia propoſita ſunt de triangulo rectangulo tantum, ſex verò quæ ſequuntur proponuntur de omni triangulo.

Problema XII.

DATA baſe trianguli, differentia laterum, & angulo verticis, inuenire triangulum.

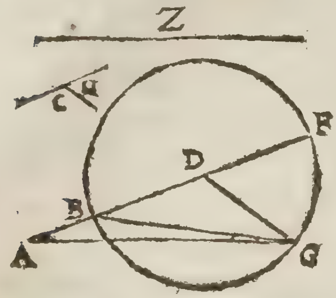
Sit data baſis trianguli Z, differentia laterum AB, angulus ad verticem æqualis angulo C. Oportet inuenire triangulum.

Ponatur iam factum & ſit illud triangulum DAG, cuius baſis AG eſtò æqualis ipſi Z, & angulus ADG aduerticem æqualis angulo C, ac denique differentia laterum DA, DG, quæ ſit AB eſtò poſitione, ac magnitudine data. Quoniam igitur DA, DG differunt per AB, erunt DB, DG æquales, itaque centro D interuallo DB, vel DG deſcribatur circulus, quem ſecet AD cõtinuata in F, & iungatur BG. Quoniam igitur datus eſt angulus ADG, dabitur & angulus FDG, vt reliquus è duobus rectis, ergo dabitur quoque & angulus FBG, vt dimidius anguli FDG,

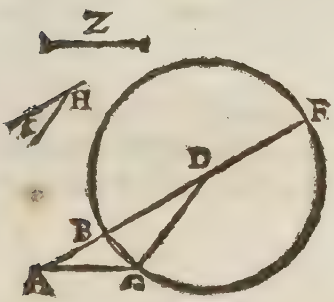
eſt

eſt enim angulus FDG ad centrum duplus anguli FBG, ad circumferentiam, ſed poſitione eſt BD, & poſitione quoque punctum B, erit * igitur poſitione & BG, & quoniam in ipſam BG à dato puncto A ducta eſt AG magnitudine data, dabitur * ipſa AG poſitione quoque, quare * & punctum G, ſed datur, & angulus DGB: ē enim ęqualis angulo DBG, æqualibus exiſtentibus DB, DG: ergo dabitur * GD poſitione, quare * & punctũ quoque D dabitur. Quoniam igitur datæ ſunt poſitione extremitates A, D, G, datarum poſitione AD, DG, ipſæ quoque * magnitudine datæ erunt.

29. Datorum
31. Dat.
25. Dat.
29 Dat.
25. Dat.
26. Dat.



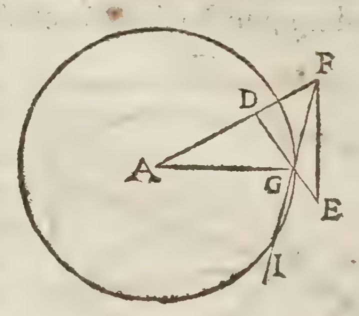
Componetur autem ſic. Producatur AB in F, & fiat angulus FBG æqualis dimidio eius, quem relinquit è duobus rectis angulus C: hoc eſt dimidio anguli H, & in BG ponat AG æqualis Z, & angulo GBD ęqualis conſtituatur angulus BGD, erunt igitur æquales DB, DG, quare differentia laterũ DA, DG trianguli DAG, erit ipſa AB data. Deſcribatur ex D centro ad interuallum DG, vel DB, circulus, quē ſecet AF in F, erit igitur angulus FDG ad centrum, duplus anguli FBG ad circumferentiam, ſed eiuſdem anguli FBG duplus eſt quoque & angulus H ex conſtructione, ergo angulus FDG angulo H æqualis erit, vnde & angulus ADG ad verticē trianguli æqualis angulo C: eſt autem & baſis AG æqualis datæ Z ex conſtructione. Conſtructum eſt igitur triangulum DAG, quod facere oportebat.



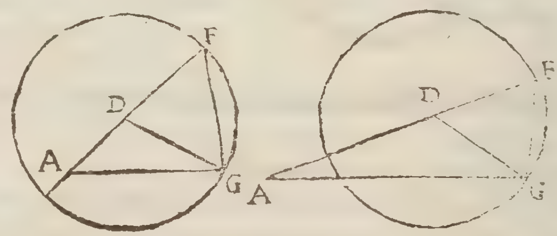
LEMMA

SI angulus trianguli fuerit centrum circuli, baſis verò ſemidiameter, & ducatur linea recta non ex centro circuli, ſed ab altera extremitate aggregati laterum, conſtituēs cum eo angulum æqualē dimidio, qui eſt ad verticem trianguli, angulo, illa recta linea in circulum incidet.

Sit triangulum DAG cuius basis AG, & centro A, interuallo AG, describatur circulus, & producatur AD in F, vt sit DF æqualis DG, aggregatum igitur laterum AD, DG erit AF: à puncto autem F ducatur FI, faciens angulum AFI, ęqualem dimidio anguli ADG; Dico ipsam FI in circulum incidere, si enim non incidit, cadit extra qualis est FE, itaque continuetur DG, donec secet ipsam FE in E. Quoniam igitur externus angulus ADE trianguli DFE, æqualis est duobus internis DFE, DEF, quorum vnus nempe DFE, ponitur dimidius ipsius ADE, erit & reliquus DEF ipsius ADE dimidius: ęquales igitur erunt anguli DFE, DEF, & ideo æquales rectæ DF, DE, quod est absurdū, ponitur enim DF æqualis DG, Recta igitur FI in circulum incidet, quod erat demonstrandum.



ALITER Sit triangulum, DAG cuius basis AG, & centro D, interuallo DG, describatur circulus, secans AD productam in F, & iungatur FG, erit angulus AFG æqualis dimidio anguli ADG hic enim est ad centrū, ille ad circumferentiam. Si igitur ex A centro ad interuallū AG circulus describatur, ipsū tanget, vel secabit recta linea FG, ideoque in ipsum circulum incidet, quod erat demonstrandum.



Problema XIII.

Prob. 15. lib. 2. Regiomontani de triãgulis.

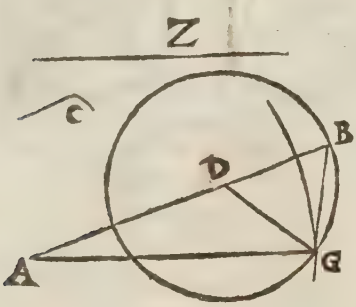
D*ATA base trianguli, aggregato laterum, & angulo verticis, inuenire triangulum.*

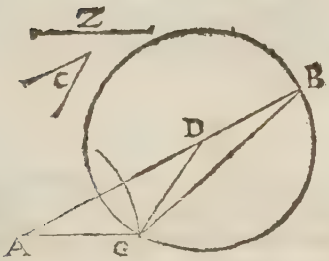
Sit data basis trianguli Z, aggregatum laterum AB, angulus ad verticem æqualis angulo C. Oportet inuenire triangulum.

Factum iam sit, & sit illud triangulum DAG, cuius basis AG estò æqualis ipsi Z, aggregatum verò laterum AD, DG, æquale ipsi

ipſi AB, magnitudine ac poſitione datæ, & angulus ADG ad verticem æqualis angulo C. iungatur autem BG Quoniam igitur compoſita ex AD, DG æqualis eſt ipſi AB, ablata communi AD, reliqua DG reliquæ DB æqualis erit, & ideo circulus ex D centro deſcriptus ad interuallum DG, tranſibit per B: deſcribatur, erit igitur angulus A D G ad centrum, duplus anguli B ad circumferentiam, ſed datur angulus A D G, ergo dabitur & angulus B, & eſt poſitione AB, ergo * & BG poſitione erit, ſed in ipſam BG à dato puncto A ducta eſt AG magnitudine data, ergo dabitur * ipſa AG poſitione quoque, & datum * erit pũctum G, & data * quoque poſitione G D, datur enim angulus D G B, quia æqualis eſt dato DBG æqualibus exiſtentibus DB, DG, quare & punctum D dabitur. Quoniam igitur datæ ſunt extremitates A, D, G, datarum poſitione, AD, DG ipſæ quoque magnitudine datæ erunt.

29. Dat.
31. Dat.
25. Dat.
29. Dat.





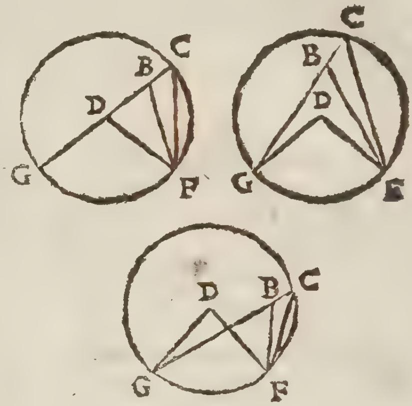
Componetur autem Problema, hoc modo. Centro A, interuallo datæ Z æquali, deſcribatur circulus, & fiat angulus ABG æqualis dimidio anguli C, ex antecedente igitur Lemmate, recta BG incidet in circulum ſub A centro deſcriptum, incidat in G, & iungatur AG, & fiat angulo B æqualis angulus BGD, erit igitur DG æqualis D B, addita communi AD, compoſita ex AD, DG, erit æqualis AB. Centro autem D, interuallo DB, vel DG deſcribatur circulus BG, erit igitur angulus A D G ad centrum duplus anguli B ad circumferentiam, ſed & angulus C duplus eſt anguli B ex conſtructione, ergo angulus ADE angulo C æqualis erit, eſt autem & baſis AG æqualis datæ Z ex conſtructione. Conſtructum eſt igitur triangulum DAG quale conſtruendum proponebatur. ADG

LEMMA.

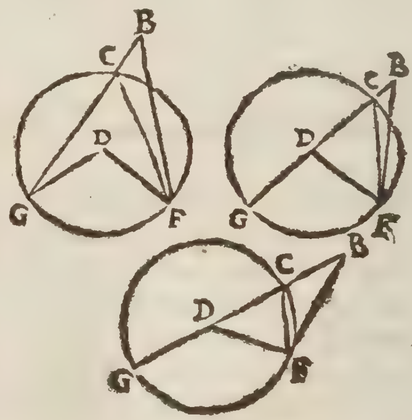
Si duo anguli in ratione dupla eidem circumferentiæ cir-

culi insisterint, duplus autem, fuerit ad centrum, alter ad circumferentiam erit.

Insistant duo anguli GDF, GBF eidem circuli circumferentiæ GF, & sit angulus GDF ad centrum circuli, atque duplus anguli GBF, Dico angulum GBF ad circumferẽtiam esse. Si enim non est ad circũferentiam, erit intra circulũ, vel extra. Sit primum si fieri potest, intra circulum, & producatur GB vsque ad circumferentiam in C, & iungatur FC, erit igitur angulus GDF ad centrum, duplus anguli GCF ad circumferentiam, sed duplus est & anguli GBF ex hypothesi, ergo angulus GBF angulo GCF æqualis erit, externus interno, quod est absurdum: angulus igitur GBF non est intra circulum.



Deinde sit angulus GBF extra circulum, ipsum igitur circulum secabit, vel vtraque rectarũ GB, FB, vel saltem vna: secet ipsa GB in puncto C, & iungatur FC, erit igitur angulus GDF, ad centrum, duplus anguli GCF ad circumferentiam; sed duplus est & anguli B ex hypothesi, ergo angulus GCF angulo B æqualis erit, externus interno, quod est absurdum: angulus igitur GBF non est extra circulum, sed neque intra circulum vt est ostensum, ergo ad circumferentiam erit, quod erat demonstrandum.



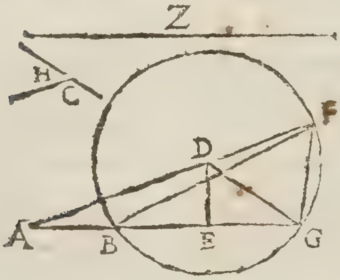
Problema XIV.

DATA differentia segmentorum basis trianguli, aggregato laterũ, & angulo verticis, inuenire triangulũ.

Sit

Sit data differentia segmentorum basis trianguli AB, aggregatum laterum Z, angulus ad verticem æqualis angulo C. Oportet inuenire triangulum.

Inuentum iam sit, & sit illud triangulum DAG in quo perpendicularis DE, & centro D, interuallo DG, quod sit minus latus, describatur circulus, secans latus AD productum in F, basim verò AG in B, erunt *igitur BE, EG æquales, vnde differentia segmentorum AE, EG erit AB: estò igitur ipsa AB positione ac magnitudine data, composita verò ex lateribus AD, DG: hoc est ipsa AF, estò æqualis Z, & angulus ADG ad verticem æqualis angulo C, & iungantur BF, FG. Quoniam igitur 3. Tertij.



datur angulus ADG, dabitur & angulus FDG, vt reliquus è duobus rectis, & dabitur quoque angulus FBG, vt dimidius anguli FDG: angulus enim FDG ad centrum, duplus est anguli FBG ad circumferentiam, positione igitur * erit BF, quia positione 29. Dat. est & AB, & quoniam datum est punctum A, à quo in BF ducta est AF magnitudine data, dabitur * ipsa AF positione quoque, 31. Dat. vnde dabitur * & punctum F, & quoniam datus est angulus 25. Dat. ADG ad centrum, datus erit & angulus AFG ad circumferentiam, vt eius dimidius, atque data * erit positione FG, vnde 29. Dat. datum * erit & punctum G, & data * quoque positione GD, 25. Dat. quia datus est angulus DGF: etenim æqualis est dato angulo 29. Dat. DFG, ratione æqualium laterum DG, DF, quare datum * erit 25. Dat. & punctum D. Quoniam igitur datæ sunt extremitates A, D, G, datarum positione, AD, DG, AG ipsæ quoque magnitudine datæ erunt.

Componetur autem hoc modo. Producatur AB in G, & fiat angulus GBF æqualis dimidio eius, quem relinquit è duob. rectis angulus C, hoc est dimidio anguli H, & in BF ponatur AF æqualis Z, & fiat angulus AFG æqualis dimidio anguli C, angulus verò FGD æqualis angulo AFG, erunt igitur æquales DG, DF: addita communi AD composita ex lateribus AD, DG trianguli DAG, æqualis erit ipsi AF, hoc est Z datæ.

Deinde centro D, interuallo DG vel DF, describatur circulus FE. Quoniam igitur angulus C duplus est anguli AFG ex FGB constructione, similiter & angulus ADG ad centrum duplus

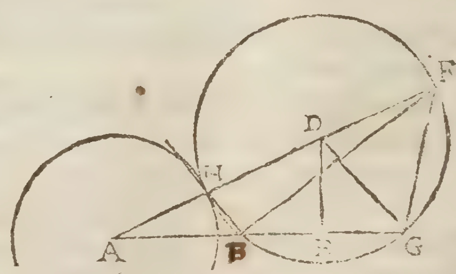
eiusdem

eiusdem anguli AFG ad circumferentiam, erit angulus ADG aduerticem dato angulo C æqualis, quare & angulus FDG angulo H, sed angulus H duplus est anguli FBG ex constructio ne, ergo & angulus FDG eiusdem anguli FBG duplus erit, sed angulus FDG est ad centrum, & insistit circumferentiæ FG, cui etiam & angulus FBG insistit, ergo ex antecedente Lemmate, angulus FBG ad circumferentiam erit. Iam agatur ipsi
3. Tertij. AG perpendicularis DE, erunt igitur * æquales BE, EG, & ideo differentia segmentorum AE, EG erit ipsa AB data. Constructum est igitur triangulum DAG, vt facere oportebat.

LEMMA I.

SI angulus trianguli fuerit centrum circuli, differentia verò laterum semidiameter, & ducatur linea recta non ex centro circuli, sed ab altera extremitate differentiæ segmentorum basis, constituens cum ea angulum æqualem dimidio; qui est ad verticem trianguli, angulo, illa recta linea circulum secabit.

Sit triangulum DAG, in quo perpendicularis DE secet basim AG in E, & centro D, interuallo DG, quod sit minus latus, describatur circulus secans latus AD productum in punctis H, F, basim verò AG in B; laterum igitur DA, DG differentia erit AH, differentia verò segmentorum AE, EG erit AB, iungantur autem BH, FG. Quoniam igitur quadrilaterum FGBH est in circulo, anguli HBG, HFG ex aduerso, duobus rectis sunt æquales, sed & anguli HBG, HBA æquales sunt duobus rectis, ergo anguli HBG, HFG angulis HBG, HBA æquales erunt, dempto

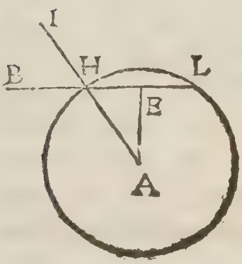


communi angulo HBG, reliquus HFG, reliquo HBA æqualis erit, sed angulus HFG ad circumferentiam dimidius est anguli HDG ad centrum, ergo & angulus HBA, eiusdem anguli ADG dimidius erit, Dico igitur circulum sub A centro, interuallo-

uallo A H deſcriptum, ſecari à BH: manifeſtum eſt autem ipſam BH in eum incidere, quoniam punctum H eſt in circumferentia, ſi igitur eum non ſecat, tangit, tangat ſi fieri poteſt, contactus erit in H, & iungatur BF, ergo rectus * erit angulus AHB, & ideo æqualis recto HBF, qui eſt in ſemicirculo; quare parallelæ * erunt AF, BF, quod eſt abſurdum, conueniunt enim in F. Non igitur BH tangit circulum, cuius centrum A, ſed ſecat, quod erat demonſtrandum. *18. Tertij* *27. Primi*

LEMMA II.

SECET circulum ſub A centro recta linea B H L, in punctis H, L, & per punctum H, quod ſit propius ad B, ducatur altera recta A H I. Dico angulum I H B minorem eſſe recto.



Diuidatur enim HL bifariam in E, & iũgatur AE, rectus igitur erit angulus AEH, ac proinde angulus EHA recto minor: tres enim interni anguli trianguli A E H duobus rectis ſunt æquales, ſed angulus E H A, æqualis eſt angulo IHB: ſunt enim ad verticem, ergo & angulus IHB, erit recto minor, quod erat demonſtrandum.

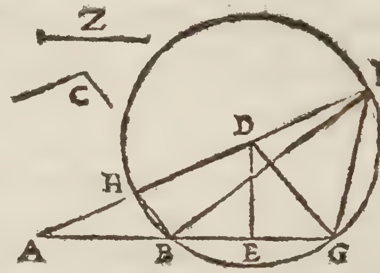
Problema XV.

DATA differentia ſegmentorum baſis trianguli, differentia laterum, & angulo verticis, inuenire triangugulum. *Prob. 20. lib. 2. Regiom. de triãgulis.*

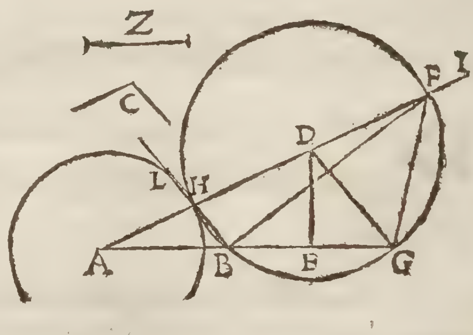
Sit data differentia ſegmentorum baſis trianguli AB, differentia laterum Z, angulus ad verticem æqualis angulo C. Oportet inuenire triangulum.

Factum iam ſit, & ſit illud triangulum DAG, in quo perpendicularis DE, & centro D, interuallo DG quod ſit minus latus, deſcribatur circulus ſecans latus DA in H, baſim verò AG in B, differentia igitur ſegmentorum AE, E G erit A B, differentia verò

verò laterum DA, DG erit AH. Estò igitur AB positione atque magnitudine data, ipsa verò AH estò æqualis datæ Z, & angulus ADG ad verticem æqualis angulo C, & producatur AD vsque ad circumferentiam in F, & iungantur HB, BF, FG. Quoniam igitur quadrilaterum FGBH est in circulo, anguli HBG, HFG ex aduerso, duobus rectis erunt æquales: sed & anguli HBG, HBA duobus rectis sunt æquales, ergo anguli HBG, HFG angulis HBG, HBA æquales erunt: auferatur vtrinque angulus HBG, reliquus igitur HFG reliquo HBA æqualis erit, sed angulus ADG ad centrum, duplus est anguli AFG ad circũferentiam, ergo & anguli HBA duplus erit angulus ADG, sed
29. Dat datur angulus ADG, dabitur ergo & HBA, quare dabitur * BH positione, & quoniam à dato puncto A in ipsam BH ducta est AH magnitu-
31. Dat. dine data, dabit * AH positione quoque, & propter datum angulum HBF: est enim rectus in semicircu-
29. Dat. lo, data * erit BF positio-
25. Dat. ne, & datũ * quoque pun-
26. Dat. ctum F, & ideo data * magnitudine HF, & quoniam æquales sunt HD, DF, dabitur punctum D, sed datur & punctum G,
26. Dat. ergo dabitur DG * positione, & magnitudine, sed datur &
26. Dat. punctum A, ergo & AD, AE positione * & magnitudine datæ erunt.



Componetur autem sic. Centro A, interuallo rectæ Z equali, describatur circulus, & fiat angulus ABH æqualis dimidio anguli C, ex antecedente igitur, quod primo loco præmissum est Lẽmate, BH secabit ipsum circulum, secet in punctis HL, & per punctum H, quod sit proprius ad B, ducatur recta linea AHI, ipsi autem BH ducatur perpendicularis BF. Quoniam igitur ex antecedente, quod secundo loco præmissum est Lemmate, angulus HB minor est recto, & angulus FBH rectus: erunt ambo simul duobus rectis minores, & ideo coibunt rectæ lineæ AI, BF, coeant in F,



&

& secetur H F bifariam in D, & centro D, interuallo D H, vel D F, describatur circulus, eius circumferentia transibit per B, propter angulum HBF rectum. Deinde producatur AB donec secet circulum FBH in G, & iungantur DG, FG, & ipsi AG ducatur perpendicularis DE, erunt igitur æquales BE, EG, & ideo differentia segmentorum AE, EG, erit ipsa AB data. Similiter quoniam æquales sunt D H, D G vt semidiametri, differentia laterum AD, DG erit AH, cui æqualis est Z data ex constructione. Superest igitur vt angulus A D G ad verticem trianguli DAG æquetur angulo C, id autem ita fit manifestum. Quoniam enim quadrilaterum F G B H est in circulo, anguli H B G, H F G ex aduerso duobus rectis erunt æquales, sed & anguli H B G, H B A sunt æquales duobus rectis, ergo anguli H B G, H F G angulis H B G, H B A æquales erunt: dempto communi angulo HBG, reliquus HFG reliquo HBA æqualis erit, sed anguli H F G ad circumferentiam duplus est angulus H D G ad centrum, ergo & anguli H B A duplus erit angulus A D G, sed & angulus C duplus est anguli H B A ex constructione, ergo angulus A D G angulo C æqualis erit, quod ostendisse oportuit; Constructum est igitur triangulum D A G, quale construendum proponebatur.

Problema XVI.

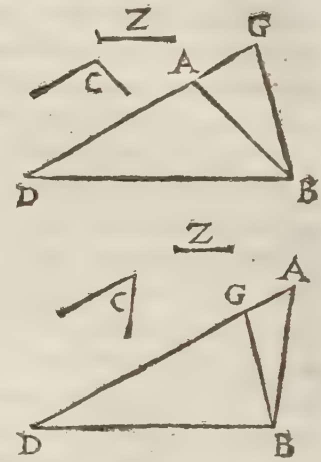
DATO vno ex lateribus trianguli datum verticis angulum ambientibus, & differentia inter reliquum latus, & basim, inuenire triangulum.

Sit datum vnum ex lateribus trianguli angulum verticis ambientibus, AB: differentia inter latus reliquum & basim, Z, angulus ad verticem æqualis angulo C. Oportet inuenire triangulum.

Factum iam sit, & sit illud triangulum ABD, cuius latus AB esto positione ac magnitudine datum, differentia verò inter reliquum latus AD, & basim DB esto æqualis ipsi Z, & angulus D A B ad verticem æqualis angulo C. Ponatur autem D G æqualis DB, differentia igitur ipsarum AD, DB erit A G, & iungatur G B. Quoniam igitur datus est angulus DAB, datus erit & angulus G A B, vt reliquus è duobus rectis, hic autem in prima figura ad primum casum pertinens, in secunda verò figura,

F quæ

quę ad secundum casum pertinet, angulus DAB idem est quod angulus GAB, quocunque igitur casu datur angulus G A B: est
29. Dat. autem positione AB, ergo * positione est & AG, sed & magni-
27 Dat. tudine, ponitur enim æqualis ipsi Z, ergo * punctum G datum
26. Dat. erit, sed datum est & B, ergo * GB positione erit, & magnitudine, atque adeo dabitur angulus A G B, quia da-
39. Dat. tur * triangulum AGB specie, & in secūda figura dabitur quoque & D G B, vt reliquus è duobus rectis, itaque in vtraque figura dabitur angulus DBG, est enim æqualis ipsi DGB, æqualibus
29. Dat. existentibus DG, DB, quare * BD po-
25. Dat. sitione erit; & ideo * positione quo-
26. Dat. que, & punctum D, ac propterea * ipsæ BD, A D magnitudine quoque datæ erunt.



Componetur aūt hoc modo. Constituatur angulo C, æqualis angulus BAD, & ponatur ipsi Z æqualis A G, & iungatur G B, & angulo D G B æqualis constituatur angulus G B D, & B D occurrat ipsi A D in D, erunt igitur D G, D B æquales, & ideo differentia inter latus AD, & basim DB trianguli ABD, erit AG hoc est Z data: est autem & angulus DAB ad verticem, æqualis angulo C ex constructione, & latus A B ipsum datum. Constructum est igitur triangulum ABD, vt facere oportebat.

Problema XVII.

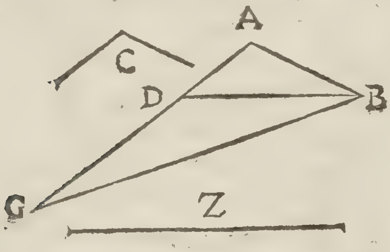
DATO vno ex lateribus tranguli datum verticis angulum ambientibus, datoque aggregato reliqui lateris & basis; inuenire triangulum.

Sit datum vnum ex lateribus trianguli angulum verticis ambientibus A B, composita verò ex reliquo latere, & base Z, & angulus ad verticem æqualis angulo C. Oportet inuenire triangulum.

Ponatur iam factum & sit illud triangulum ABD, cuius latus AB estò positione ac magnitudine datum; composita verò ex reliquo latere A D, & base D B estò æqualis ipsi Z, & angulus

aduerti-

aduerticem A æqualis angulo C. Producatur autem AD in G, vt sit DG æqualis DB: erit igitur AG ęqualis compositæ ex AD, DB, & iungatur GB. Quoniam igitur positione est AB, & datus est angulus A, erit AG * positione data, sed data est & ma- 29. Dat.
gnitudine, ergo & * punctum G datum erit, datur autem & B, 27. Dat.
dabitur, * ergo GB positione, & magnitudine, atque adeo da 26. Dat.
bitur & angulus G, quia triangulum * ABG datur specie; est au- 39. Dat.
tem angulo G æqualis angulus GBD, ratione æqualiũ DB, DG, quare & ipse GBD datus erit, positione igitur * erit BD, quare 29. Dat.
& * punctum D. Quoniam igi- 25. Dat.
tur positione datarũ DB, DA dati sunt termini A, D, B, ipsæ magnitudine quoque datæ erunt.



Componetur autem sic, angulo C cõstituatur æqualis angulus BAG, & ponatur AG æqualis ipsi Z, & iuncta GB, constituatur quoque angulus GBD æqualis angulo G, erunt igitur DB, DG æquales, addita communi DA, composita ex latere AD, & base DB trianguli ABD, æqualis erit ipsi AG, hoc est Z datæ: est autem & angulus aduerticem A æqualis angulo C ex constructione, & latus AB ipsum datum. Constructum est igitur triangulum ABD, quod facere oportebat.

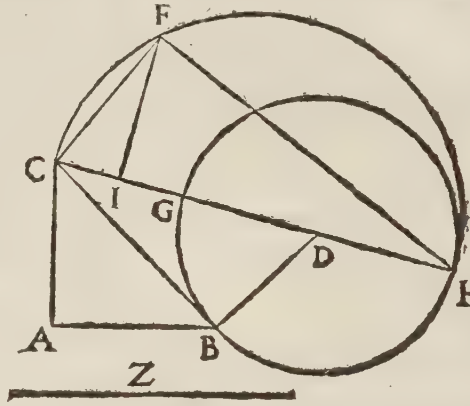
Problema XVIII.

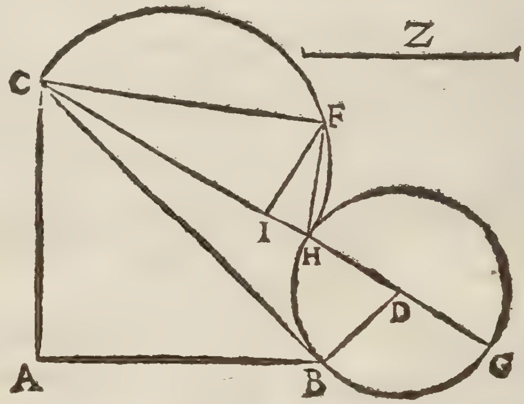
DATO vno ex lateribus trianguli angulum rectum ambientibus, dataque differentia segmentorum basis, inuenire triangulum.

Hoc Problema duos casus habet propter duplicem lateris dati conditionem: latus enim datum intelligitur interdum minus duorum, interdum maius, ad primum igitur casum prima figura pertinet, ad secundum secunda.

Sit datum vnum ex lateribus trianguli angulum rectum ambientibus AB, data quoque differentia segmentorum basis Z. Oportet inuenire triangulum. Inclinentur ad angulos rectos AB, AC æquales, & conectatur CB, cui perpendicularis ducatur BD & æqualis dimidiæ Z, & conectatur quoque CD, &

centro D, interuallo DB describatur circulus GBH, secans CD productam in punctis G, H, is igitur circulus tanget rectam CB in B. Deinde circa diametrum CH describatur alius circulus, cui inscribatur CF æqualis AB, & iungatur FH, & ipsi CH ducatur perpendicularis FI. Quoniam igitur CB tangit circulum GBH in B, rectangulum GCH æquale erit quadrato CB,





sed quadratũ CB duplũ est quadrati AB, hoc est quadrati CF, ergo & rectangulum GCH quadrati CF duplum erit, sed quadrato CF æquale est rectangulum ICH, est enim* CF media proportionalis inter IC, CH: rectangulum igitur GCH duplũ erit rectanguli ICH, atque adeo CG dupla erit ipsius CI, vnde CI, IG erunt æquales; itaque differentia segmentorũ CI, IH erit GH, hoc est Z data, est autem & latus FC æquale ipsi AB ex cõstructione, & angulus CFH in semicirculo rectus, Triangulum igitur FCH problemati satisfacit, quare factum est quod oportebat.

Ex coroll. 8 16.

At verò diametrum CH maiorem esse quam AB, in prima figura manifestum est, in secunda verò sic demonstrabitur.

Sit si fieri potest diameter CH non maior quam AB, ergo CG minor erit quam AB dupla: est enim HG, hoc est Z minor quam AB, quia differentia segmentorum basis trianguli minor est latere maiori, quare rectangulum HCG minus erit rectangulo sub AB, & altera ipsius dupla, hoc est duplo quadrati AB, sed duplum quadrati AB æquale est quadrato CB, ergo rectangulum HCG minus erit quadrato CB, quod est absurdum,

ſurdum, oſtenſum enim eſt in elementis ipſi æquale. Diameter igitur CH maior eſt quam AB, quod erat demonſtrandum.

CONSECTARIVM.

Primo igitur caſu, compoſita ex dimidia differentia ſegmentorum baſis, & ea quæ poteſt duplum quadrati lateris dati, plus quadrato dimidiæ differẽtiæ, æqualis eſt baſi trianguli quæſiti.

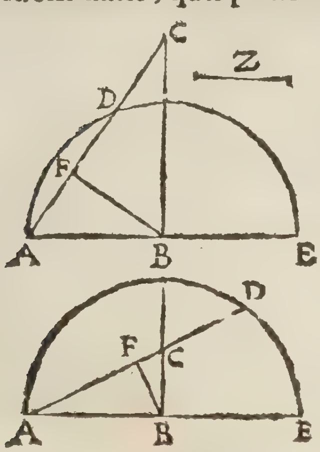
Secundo caſu, exceſſus quo prædicta potens ſuperat dimidiam ſegmentorum differentiam, æqualis eſt quæſitæ baſi.

Recta enim quæ poteſt duplum quadrati lateris dati, plus quadrato dimidiæ differentiæ ſegmentorum baſis eſt CD, dimidia verò differentia DH, baſis autem CH trianguli FCH in prima figura, eſt compoſita ex CD, DH, in ſecunda verò figura baſis CH eſt exceſſus, quo CD ſuperat ipſam DH.

Sit FC in prima figura 30, GH 14, vel DH 7, erit CH 50, vnde FH 40, radix enim quadrati 1849, quod conſtat duplo quadrati ex 30, & quadrato ex 7, eſt 43, cui ſi addatur 7, fiet 50, probaſe CH.

In ſecunda figura ſit FC 40, HG 14, vel HD 7, erit CH 50, vnde FH 30, radix enim quadrati 3249, quod conſtat duplo quadrati ex 40, & quadrato ex 7, eſt 57, exceſſus igitur quo 57, ſuperat 7, erit 50, probaſe CH.

ALITER idem Problema hoc modo abſoluetur. Iiſdem datis, quæ prius. Duplicetur AB in E, & in AE deſcribatur ſemicirculus, & ducatur ipſi AE perpendicularis BC indefinita, in ipſa autem BC ponatur AC ſecans ſemicirculum in D, ita vt CD fiat æqualis ipſi Z: hoc enim fieri poſſe demonſtrauimus in Apollonio rediuiuo, caſu quarto, & tertio ſecundi Problematis. Denique ipſi AC ducatur perpendicularis BF, erunt igitur AF, FD æquales, & ideo differentia ſegmentorum AF, FC erit CD, hoc eſt Z data. Constructum eſt igitur triãgulum ABC rectangulum in B, cuius latus AB eſt ipſum datum, & CD differentia ſegmentorum AF, FC æqualis Z datæ, quod erat faciendum.



Problema

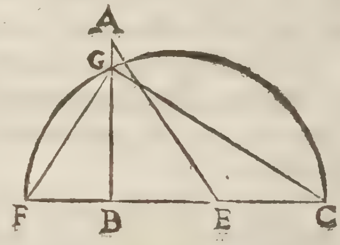
Problema XIX.

DATO vno ex lateribus trianguli angulum rectum ambientibus, datoque alterno basis segmento, inuenire triangulum.

Sit datum vnum ex lateribus trianguli angulum rectum ambientibus AB, segmentum autem basis alternum BC. Oportet inuenire triangulum. Inclinentur ad angulos rectos AB, BC, & secetur BC bifariam in E, & iungatur AE, cui æqualis ponatur EF, & in FC describatur semicirculus, quem AB secet in G, & iungantur FG, GC. Quoniam igitur secta est BC bifariam in E, & illi adiecta FB, rectangulum BFC vnà cum quadrato BE æquale *erit quadrato FE, hoc est AE, sed quadratū AE æquale est quadratis AB, BE, ergo rectangulum BFC vnà cum quadrato BE æquale erit quadratis AB, BE. Commune auferatur quadratum BE, reliquum igitur rectangulum BFC, hoc est quadratum GF (est enim * GF media proportionalis inter BF, FC) reliquo quadrato AB æquale erit, quare & recta GF æqualis erit rectæ AB. Constructum est igitur triangulum GFC rectangulum in G, cuius latus GF æquale est ipsi AB, & segmentum basis alternum BC est ipsum datum, quod facere oportebat.

6. Secūdi.

Ex coroll. 8. Sexti.



CONSECTARIVM.

Itaque recta quæ potest quadrata, lateris videlicet dati, & dimidij segmenti, aucta dimidio segmento, æqualis est basi trianguli, diminuta verò æqualis alteri segmento.

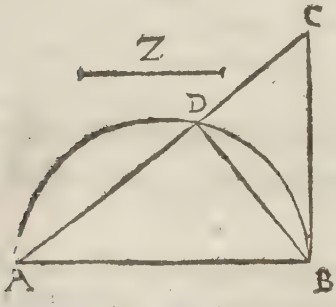
Recta enim quæ potest quadrata lateris dati, & dimidij segmenti est AE, hoc est FE, dimidium verò segmentum EC, vel EB: basis igitur FC æqualis est FE auctæ ipsa EC, segmentum verò FB æquale eidem FE diminutæ ipsa EB.

Sit latus trianguli GF 15, alternum basis segmentum BC 16, eius dimidium 8, erit basis FC 25, FB alterum segmentum 9, vnde latus GC 20. Radix enim quadrati 289, quod constat quadra-

quadratis ex 15, & 8, est 17, cui si addatur 8, fiet 25 probase FC, si verò auferatur, relinquetur 9, pro segmento FB.

ALITER idem Problema hac ratione absoluetur.

Sit datum vnum ex lateribus trianguli angulum rectum ambientibus AB, segmentum basis alternum Z. & oporteat facere quod imperatum est. Describatur in AB semicirculus, & ducatur perpendicularis BC indefinita, in ipsa autem BC ponatur AC secans semicirculum in D, ita vt DC sit æqualis ipsi Z: hoc autem quomodo fieri possit demonstrauimus in Apollonio rediuiuo, casu quinto problematis secundi, si igitur iungatur DB, triangulum ABC, erit illud de quo quæritur, est enim rectangulum in B ex constructione, & latus AB ipsum datum, atque segmentum basis alternum DC æquale ipsi Z ex constructione, basis enim segmẽta sunt AD, DC, quia BD perpendicularis est basi AC, propter angulum ADB in semicirculo rectum, quare factum est quod oportebat.



Magni momenti essent duo problemata proximè præcedentia, si in omni triangulo non in rectangulo tantum construerẽtur, primum enim opportunum esset ad sectionem cuiuslibet anguli rectilinei, vel circumferentiæ in tres partes æquales, secundum verò ad duplicationem cubi. Proponerentur illa duo problemata hoc modo.

Primum, Dato vno ex lateribus trianguli datum angulum verticis ambientibus, dataque differentia segmentorum basis, inuenire triangulum.

Secundum, Dato vno ex lateribus trianguli datum angulum verticis ambientibus, datoque alterno basis segmento, inuenire triangulum. Si hæc problemata construerentur, secaretur vt diximus quilibet angulus rectilineus, vel circumferentia trifariam, duplicaretur cubus, atque Geometriæ defectus supplerentur.

LEMMA.

Quadratum differentiæ duorum laterum æquale est quadratis laterum, minus duplo sub ipsis rectangulo.

Sint

-B Sint duo latera AB, CD quorum differentia AC. Dico quadratum A C æquale esse quadratis A B, B C, minus duplo rectangulo A B C. Quoniam enim quadratum AC vna cum duplo rectangulo ABC * æquale est quadratis AB, CB, ablato vtrinque duplo rectangulo A B C, quadratum A C æquale erit quadratis A B, C B, minus duplo rectangulo A B C, quod erat demonstrandum.

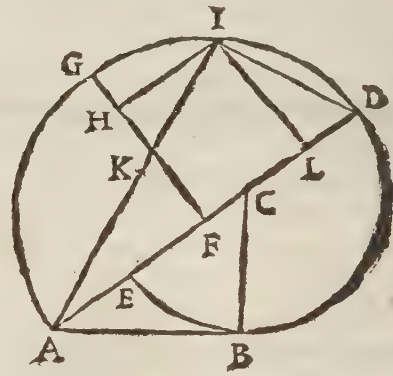
7. 2.



Problema XX.

D*ATA differentia laterum trianguli angulum rectum ambientibus, dataque perpendiculari, inuenire triangulum.*

Sit data differentia laterum trianguli angulum rectum ambientibus A B, data quoque perpendicularis B C. Oportet inuenire triangulum. Inclinentur ad angulos rectos AB, BC, & conectatur A C, & centro C, interuallo C B describatur circulus, secans A C continuatam in punctis E, D, is igitur circulus tanget ipsam AB in B: deinde fiat A D diameter alterius circuli A G D, ex cuius centro F ducatur perpendicularis F G, & sumatur F H æqualis C D, vel C B, & ipsi A D parallela agatur H I, secans circulum AGD in I, & conectantur AI, I D, & ipsi A D ducatur perpendicularis I L, & sumatur I K æqualis I D. Quoniam igitur parallelogrammum est HILF, erit I L perpendicularis trianguli I A D, æqualis HF: hoc est ipsi C B, est autem & angulus A I D in semicirculo rectus; superest igitur vt A K differentia laterum IA, I D æquetur ipsi A B, id autem ita fit manifestum.



Quoniam enim laterum IA, ID differentia est A K, quadratum A k ex antecedente Lemmate æquale erit quadratis A I, ID, minus duplo rectangulo A I D, sed quadrata AI, I D æqualia sunt

lia sunt quadrato A D, & duplum rectangulum A I D æquale duplo rectangulo A D, I L: est enim propter similitudinem triangulorum I A D, I L D, vt A I ad A D, ita I L ad I D & ideo rectangulum A I D sub extremis, æquale rectangulo A D, I L sub medijs: quadratum igitur A k æquale erit quadrato A D, minus duplo rectangulo A D, I L, hoc est minus rectangulo ADE: est enim DE dupla ipsius IL, sed quadratum A D minus rectangulo ADE idem est quod rectangulum DAE, ergo quadratum A k, æquale erit rectangulo D A E, hoc * est quadrato AB, vnde & recta A k æqualis rectæ AB, quod ostendisse oportuit. Constructum est igitur triangulum I A D rectangulum in I, cuius laterum I A, I D differentia A K, æqualis est ipsi A B, & perpendicularis IL æqualis BC, quod faciendum erat. *36. Tertij*

CONSECTARIVM.

Itaque composita ex perpendiculari, & ea cuius quadratum æquale est quadratis differentiæ laterum, & perpendicularis æqualis est basi trianguli quæsiti.

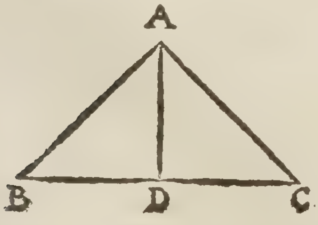
Recta enim cuius quadratum æquale est quadratis A k, I L, hoc est A B BC est AC, composita verò ex I L, hoc est ex C D, & ex ipsa AC est AD, basis trianguli IAD.

Sit AK 5, IL 12, erit AD 25, vnde IA 20, ID 15. Radix enim quadrati 169, quod constat quadratis ex 5, & 12, est 13, cui si addatur 12, fiet 25, probale A D.

LEMMA

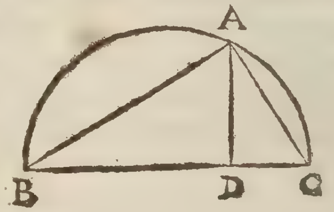
Quadratum aggregati laterum trianguli, angulum rectum ambientium, non est minus octuplo eius quod à perpendiculari fit quadrati.

Sit triangulum A B C, in quo perpendicularis A D cadat in basim BC, ab angulo recto BAC. Dico quadratũ compositæ ex B A, A C non esse minus, octuplo quadrati A D: aut enim æqualia sunt latera AB, A C, aut inæqualia, sint primum æqualia, ergo & BD, DA, DC erunt quoque æquales, & ideo quadratum A B duplum erit quadrati A D, sed



quadrati A B quadruplum est quadratum compositæ BAC, ergo quadratum ipsius BAC compositæ octuplum erit quadrati AD, non autem minus.

Sed sunto latera A B, A C inæqualia, ergo & B D, D C erunt inæquales, describatur autem in B C semicirculus B A C, eius circumferentia transibit per A, propter angulū BAC rectum. Quoniam igitur inæquales sunt BD, D C, ipsa DA non erit ex centro circuli, & ideo BC maior erit quam AD dupla, & consequenter quadratum B C maius quadruplo quadrati A D, eadem ratione, & rectangulum B C, A D maius erit duplo quadrati AD, & consequenter duplum rectanguli BC, A D maius quadruplo quadrati A D; ergo quadratum BC, vnà cum duplo rectanguli B C, A D maiora erunt octuplo quadrati A D, sed quadratum BC æquale est quadratis A B, A C, & duplū rectanguli B C, A D æquale duplo rectanguli B A C: est enim propter similitudinem triangulorum ABC, DAC, vt BC ad BA, ita AC ad AD, & ideo rectangulum sub extremis B C, A D æquale rectangulo B A C sub medijs: quadrata igitur BA, A C, vnà cum duplo rectanguli BAC, hoc est quadratum compositæ BAC maius erit octuplo quadrati AD, non autem minus. Quare cōstat propositum.



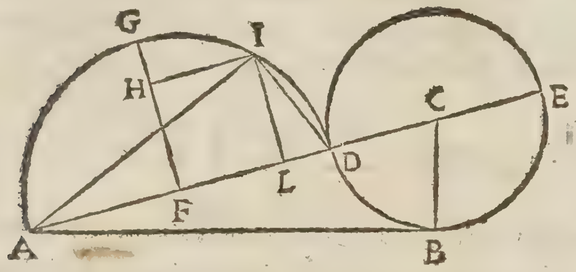
Problema XXI.

DATO aggregato laterum trianguli angulum rectum ambientium, dataque perpendiculari, inuenire triangulum.

Sit datum aggregatum laterum trianguli, angulum rectum ambientium A B, data quoque perpendicularis B C. Oportet inuenire triangulum. Inclinentur ad angulos rectos AB, BC; & conectatur A C, & centro C, interuallo C B describatur circulus, secans A C continuatam in punctis E, D, is igitur circulus tanget ipsam A B in B. Deinde fiat A D diameter alterius circuli A G D, ex cuius centro F ducatur perpendicularis F G, & sumatur F H æqualis C D, vel C B: inferius demonstrabitur ipsam F G non esse minorem quam B C, acta denique ipsi A D

parallela

parallela HI, secans circulum A G D in I, conectantur AI, ID, & ipsi AD ducatur perpendicularis IL, ea erit æqualis HF, hoc est ipsi B C, & angulus A I D in semicirculo rectus: reliquum igitur est vt composita ex lateribus A I, ID ostendatur æqualis ipsi AB, id autem ita fiet.



Quoniã enim quadratum compositæ AID ęquale est quadratis A I, I D, vnà cum duplo rectãgulo A I D, quadrata autem A I, I D æqualia sunt quadrato A D, & duplum rectangulum AID æquale duplo rectangulo A D, IL: est enim propter similitudinem triangulorum IAD, ILD, vt A I, ad AD, ita IL, ad ID, & ideo rectangulum AID sub extremis æquale rectangulo sub medijs AD, IL: quadratum igitur compositæ AID æquale erit quadrato A D, vnà cum duplo rectangulo AD, IL, hoc est vnà cum rectangulo ADE, est enim D E dupla ipsius IL, sed quadratũ AD, vnà cum rectangulo ADE, æquale est rectangulo DAE, ergo quadratum compositæ AID æquale erit rectangulo D A E, hoc est * quadrato A B, vnde & ipsa composita æqualis ipsi A B, quod ostendisse oportuit. 36. Tertij
Constructum est igitur triangulum IAD rectangulum in I, cuius laterum AI, ID aggregatum æquale est ipsi A B, & perpendicularis IL æqualis ipsi BC, quod erat faciendum.

At verò ipsam FG non esse minorem quam BC, ita demonstrabitur. Quoniam enim quadratum AB ex antecedẽte Lemmate, non est minus octuplo quadrati B C, quadrata A B, B C, hoc est quadratum A C non erit minus nonuplo quadrati B C; ergo & recta AC non erit minor quam tripla BC, auferatur ex AC recta DC, quæ æqualis est ipsi BC, reliqua igitur AD, non erit minor quam dupla B C, neque dimidia A D, hoc est ipsa FG minor erit, quam ipsa BC, quod erat demonstrandum.

CONSECTARIVM.

Itaque differentia inter perpendicularem, & eam cuius qua-

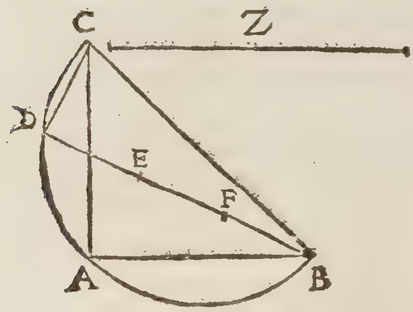
dratum æquale est quadratis compositæ ex lateribus, & perpendicularis, æqualis est basi trianguli quæsiti.

Differentia enim inter perpendicularem BC, hoc est CD, & ipsam AC, rectam videlicet cuius quadratum æquale est quadratis AB, BC, est AD, basis trianguli IAD.

Sit composita ex AI, ID, hoc est ipsa AB 35, IL seu BC 12. Erit AD 25, vnde IA 20, ID 15, differentia enim inter 12, & 37, radicem videlicet quadrati 1369, quod constat quadratis ex 35, & 12, est 25, quæ indicat basim trianguli quæsiti.

Problema XXII.

DATIS duabus rectis lineis inæqualibus quam maior non excedat diametrum quadrati ex minore descripti, maiorem ita secare, vt partium quadrata simul æqualia sint quadrato minoris.



Sint datæ duæ rectæ lineæ, Z quidem maior, AB minor. Oportet ipsam Z, in duas partes secare, ita vt partium quadrata simul æqualia sint quadrato AB. Ducatur ipsi AB perpendicularis, & æqualis AC, & iuncta CB, fiat diameter circuli CAB, in quo accommodetur BD æqualis ipsi Z, ex determinatione enim Problematis ipsa Z non est maior quam CB, deinde iungatur CD, cui æqualis ponatur DE, & secetur bifariam EB in F. Quoniam igitur BE secta est bifariam in F, & illi adiecta ED, quadrata DB, DE dupla * erunt quadratorum DF, FB, sed quadrata DB, DE: hoc est DB, DC æqualia sunt quadrato CB propter angulum CDB in semicirculo rectum, ergo & quadratum CB duplum erit quadratorum DF, FB, sed duplum est & quadrati AB, ergo quadrata DF, FB quadrato AB æqualia erunt. Secta est igitur DB, cui æqualis est Z data in F, ita vt quadrata partium DF, FB æqualia sint quadrato AB, quod facere oportebat.

* 10 Secũdi.

CON-

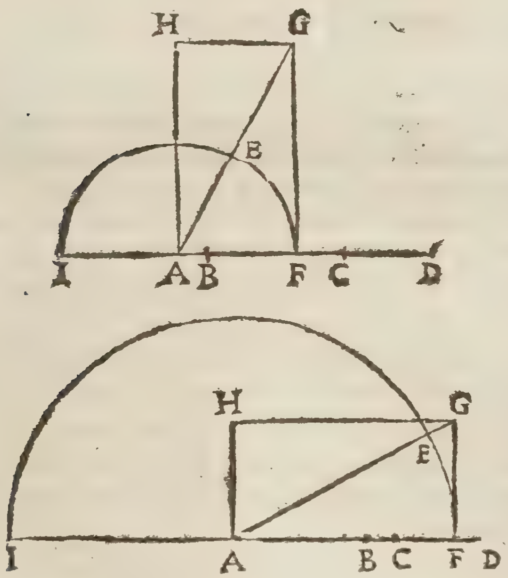
CONSECTARIVM.

Itaque exceſſus, quo duplum quadrati à linea minore ſuperat quadratum à maiore, æqualis eſt quadrato differentiæ partium maioris.

Sit Z, vel DB 17, AB 13, erit DF 12, FB 5. Exceſſus enim quo duplum quadrati ex 13, quod eſt 338, ſuperat quadratũ ex 17, nempe 289, eſt 49, quadratum videlicet ipſius DE differentiæ partium D F, F B. vnde ipſa DE erit 7, reliqua verò EB 10, eius dimidia FB 5, DF 12.

Problema XXIII.

DATIS duobus exceſſibus quibus diameter parallelogrammi rectanguli vtrunque latus ſuperat, inuenire parallelogrammum.



Sint dati duo exceſſus AB, BC, quibus diameter parallelagrammi rectanguli excedit latera. Oportet inuenire parallelogrammũ. Ponãtur in directum A B, BC, & fiat duplo rectanguli A B C æquale quadratum CD, & ponatur D F æqualis B C, & ipſi AD ducatur perpendicularis FG, ipſi verò BD æqualis, & compleatur parallelogrammũ A F G H, cuius diameter A G, & centro A, interuallo AF deſcribatur circulus, quem ſecet AG in E, ipſa verò producta in I. Quoniam igitur duplum rectanguli A B C æquale eſt quadrato CD ex conſtructione, addito communi quadrato B C, vnà cum duplo rectanguli FB C, duplum rectangulorum AB C, F B C, vnà

cum

cum quadrato BC, hoc est FD, æqualia erunt quadratis BC, CD, vnà cum duplo rectanguli FBC, hoc est BCD: sunt enim BF, CD æquales, quia BC æqualis est FD, & CF vtrique communis, sed duplum rectangulorum ABC, FBC æquale est rectangulo sub BC, hoc est FD, & composita ex duplis AB, BF, hoc est rectangulo IFD: ergo rectangulum IFD, vnà cum quadrato FD, hoc * est rectangulum IDF æquale erit quadratis BC,
3. Secũdi. CD, vnà cum duplo rectanguli BCD, hoc est * æquale erit qua-
4. Secũdi. drato BD, vel FG, addatur commune quadratum AF, rectan-
6. Secũdi. gulum igitur IDF, vnà cum quadrato AF, hoc * est quadratum AD æquale erit quadratis AF, FG, hoc est quadrato AG, quare & recta AD æqualis erit rectæ AG: ablatis igitur æqualibus AF, AE, reliqua FD, hoc est BC reliquæ EG æqualis erit. Parallelogrammi igitur AFGH diameter AG excedit latus AF excessu EG æquali ipsi BC, excedit autem & alterum latus FG excessu æquali AB, ipsa enim AD, cui æqualis est diameter AG, excedit ipsam BD, hoc est latus FG excessu AB. Constructum est igitur parallelogrammum rectangulum AFGH, vt facere oportebat.

CONSECTARIVM.

Itaque, recta cuius quadratum, duplum est rectanguli sub excessibus datis aucta excessu maiori, efficit latus maius parallelogrammi quæsiti, aucta verò minori excessu, latus minus efficit, aucta denique vtroque excessu efficit diametrum.

Recta enim DC aucta excessu CB æqualis est lateri FG, aucta verò vtroque excessu CB, BA, æqualis diametro GA, ac denique recta DC, hoc est FB aucta excessu BA, est ipsum latus FA.

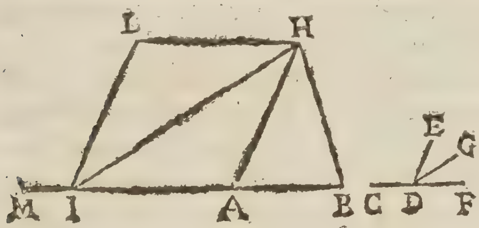
Sit minor excessus 2, maior 9, erit latus maius parallelogrāmi quæsiti 15, latus minus 8, diameter 17, duplum enim rectanguli sub excessibus 2, & 9, est 36, radix verò quadrata numeri 36, est 6, quæ aucta excessu 9, fit 15, pro latere maiori, aucta verò excessu 2, fit 8, pro latere minori, aucta denique vtroque excessu 2, & 9, fit 17, pro diametro.

Problema XXIV.

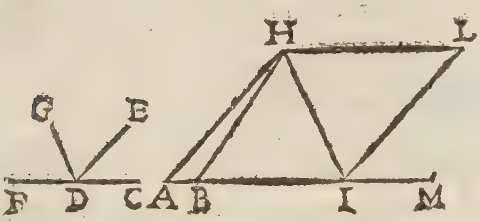
DATO vno ex angulis rombi, & differentia inter eius latus, & diametrum, inuenire rombum.

Sit

Sit datus vnus ex angulis rombi,æqualis angulo CDE, differentia autem inter eius latus, & diametrum A B. Oportet inuenire rombum. Si angulus datus sit is quem diameter secat, reliquus è duobus rectis erit angulus quem diameter subtẽdit. Itaque dato vno dabitur alter. Sit igitur datus angulus C D E æqualis ei quem diameter subtendit, & producatur C D in F, & secetur bifariam angulus F D E recta linea D G, si igitur angulus CDE maior sit dimidio anguli CDG, producatur A B ad



partes A, si verò sit minor, producatur ad partes B, æqualis autem dimidio nõ potest esse, quia nullus esset excessus inter latus rõbi, & diametrum, quod nõ ponitur. Producta igitur AB, vt dictum est in M, fiat dimidio anguli C D G, æqualis angulus M B H, & angulo C D E æqualis angulus M A H, & conueniant A H, B H, in H: conuenient enim, vt inferius demonstrabitur. Rursus



angulo MBH ęqualis constituatur angulus BHI, & compleatur parallelogrammum IAHL, cuius diameter IH. Quoniam igitur angulus MIH externus tranguli HIB, æqualis est duobus internis angulis I H B, I B H, quibus etiam æqualis est angulus C D G: vterque enim est eius dimidius ex constructione, erit angulus M I N angulo C D G æqualis, quare & angulus H I B angulo GDF Quoniam igitur angulus MIH ostensus est æqualis angulo C D G, & est quoque æqualis duobus internis angulis MAH. IHA, angulus CDG, hoc est duo anguli CDE, EDG duobus MAH, IHA erunt æquales, demptis æqualibus angulis CDE, MAH, reliquus EDG, hoc est GDF reliquo IHA æqualis erit, sed ostensus est angulus GDF æqualis angulo HIB, hoc est HIA, ergo & angulus IHA angulo HIA, erit æqualis; quare & latus AH lateri A I, sed lateri AH æquale est I L, & lateri AI æquale H L, quia parallelogrammum est A I L H, ergo latera AI, IL, LH.HA erunt interse æqualia, parallelogrammum igitur A I, L H, rombus est, & angulus I A H quem subtendit diameter, æqualis est angulo C D E ex constructione. Et quoniam

anguli

anguli HBI, BHI sunt æquales ex constructione, erunt & rectæ IH, IB æquales, sed IB differt ab IA per AB; ergo & IH differet ab ipsa IA per eandem AB. Constructus est igitur romb. IAHL, vt facere oportebat.

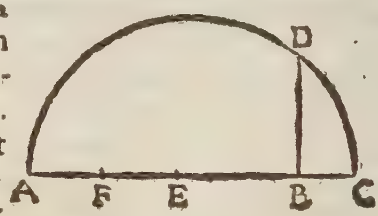
At verò rectas AH, BH conuenire sic demonstrabitur. Angulus C D E in prima figura, hoc est M A H maior est dimidio anguli C D G, hoc est angulo M B H, sed angulus M A H, vnà cum angulo H A B duobus rectis sunt æquales, ergo angulus H A B, vnà cum angulo H B A duobus rectis erunt minores, & ideo conuenient A H, B H, quod erat demonstrandum.

In secunda figura, angulus C D E, hoc est M A H minor est dimidio anguli CDG hoc est angulo MBH, sed angulus HBA, vnà cum angulo H B M æquales sunt duobus rectis, ergo angulus HBA, vnà cum angulo HAB duobus rectis erunt minores, quocunque igitur casu conueniunt AH, BH, quod erat demonstrandum.

Problema XXV.

DATAM rectam lineam secare, ita vt rectangulum sub partibus comprehensum æquale sit ei, quod à differentia partium fit quadrato.

Sit A B data recta linea secanda in duas partes, ita vt rectangulum sub partibus comprehensum, æquale sit quadrato differentiæ partium. Producatur A B in C, vt ipsa AB sit quintupla ipsius B C, & in A C describatur semicirculus A D C, & ex B educatur perpendicularis BD, cui



æqualis ponatur B E, & secetur A E bifariam in F, differentia igitur partium A F, F B erit E B, & quoniam A B quintupla est ipsius BC, quintuplum rectanguli ABC, hoc est quintuplũ quadrati BD æquale erit quadrato AB, sed quadratum AB æquale* est quadrato E B, vnà cum quadruplo rectanguli E F B, hoc est A F B, ergo quintuplum quadrati B D, hoc est EB æquale erit quadrato E B, vna cum quadruplo rectanguli A F B: auferatur commune quadratum EB, quadruplum igitur rectanguli AFB quadruplo quadrati EB æquale erit, & consequenter simplum

*8. Secũdi.

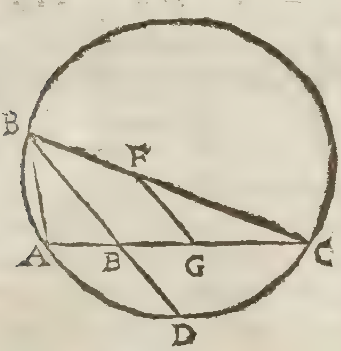
simplo,

ſimplo. Secta eſt igitur A B in F, & ita vt rectangulum A F B ſub partibus æquale ſit quadrato E B, differentiæ videlicet partium A F, F B, quod erat faciendum.

Problema XXVI.

CIRCVLI portione data, inuenire punctum in eius circumferentia, à quo cum ducentur duæ rectæ lineæ, ad extrema baſis portionis puncta, rectangulum ſub ipſis comprehenſum æquale erit differentiæ ipſarum quadrato.

Sit data circuli portio ABC, cuius baſis AC. Oportet inuenire punctum in circumferentia A B C, à quo cum ducentur duæ lineæ rectæ ad puncta A, C, rectangulum ſub ipſis comprehenſum æquale ſit quadrato differentiæ ipſarum. Compleatur circulus ABCD, & circumferentia ADC ſecetur bifariam in D, & ſecetur * quoque AC, in E, ita vt rectangulum AEC, ſit æquale quadrato differentiæ ipſarum A E, E C, & iuncta D E producatur in B, & iungantur quoque AB, BC, & ſumantur B F, E G, æquales ipſis BA, AE, vtraque vtrique: differentia igitur rectarū *Ex antec.*



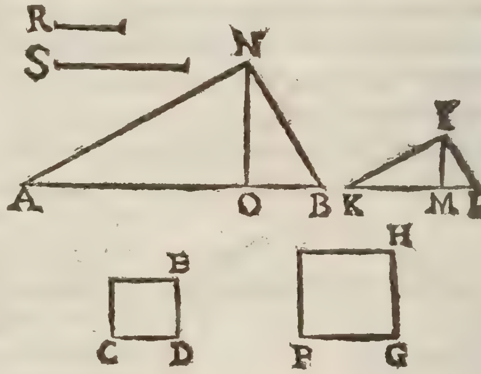
AB, B C, erit F C, ipſarum quoque AE, EC differentia erit GC. Et quoniam æquales ſunt anguli A B D, D B C æqualibus circumferentijs inſiſtentes, * erit A E ad E C, ſicut AB, ad BC: ſed AE, AB ęquales ſunt ipſis EG, BF, vtraque vtrique ex cōſtructione, ergo vt E G, ad E C, ita erit B F, ad B C, & per conuerſionē rationis vt E G, ad G C, ita erit B F, ad FC, iuncta igitur FG, parallela * erit ipſi BE. Et quoniam rectangulum AEC, hoc eſt GEC æquale eſt quadrato GC ex conſtructione, erit EG, ad GC, ſicut GC, ad EC, ſed oſtenſum eſt vt EG, ad GC, ita eſſe BF, ad FC, ergo vt BF, ad FC, ita erit GC, ad EC, ſed ratione parallelarum FG, BE, eſt vt GC, ad EC, ſicut FC, ad BC, ergo vt BF, hoc eſt BA, ad FC, ita erit FC, ad BC, rectangulum igitur ABC ſub extremis æquale erit quadrato mediæ F C. Inuentum eſt igitur punctum B in circumferentia, à quo cum ducentur duæ rectæ lineæ B A, *3. Sexti.* *2. Sexti.*

B C, ad extrema basis puncta A, C, rectangulum A B C, æquale erit quadrato F C, differentiæ videlicet ipsarum AB, BC, quod faciendum erat.

Problema XXVII.

DATAM rectam lineam ita secare, vt rectangulum, quod tota, & altera parte continetur ad quadratum partis reliquæ, datam habeat rationem.

Euclides Propositione vndecima libri secundi, Elementorũ docet lineam rectam secare, vt rectangulum sub tota, & altera parte sit æquale quadrato partis reliquæ, at verò vt habeat eam quæ ponitur rationem, sic erit secanda.



Sit data recta linea AB, quã oportet secare, vt rectangulum sub tota, & altera parte ad quadratum partis reliquæ rationẽ habeat vt R, ad S. Exponatur aliquod quadratum CDE, & fiat vt R, ad S, ita quadratum C D E ad quadratum FGH: deinde inuenia tur triangulum rectangulum habens vnum ex lateribus angulum rectum ambientibus, æquale ipsi CD, & segmẽtum basis alternum æquale ipsi FG, id enim iam docuit Problema decimum nonum. Sit igitur illud triangulum I K L rectangulum in I, in quo perpendicularis IM, sit autem latus IL æquale ipsi CD, segmentum KM alternum æquale ipsi FG, & super datam AB, triangulo I K L simile similiterque positum constituatur triãgulum NAB, à cuius angulo recto ANB demittatur perpendicularis N O. Quoniam igitur similia sunt triangula NAB, IkL similiterque posita, erit angulus A æqualis angulo k, & angulus B æqualis angulo L, & anguli ad O, & M sunt recti, & ideo æquales: erit triangulũ NOA simile triangulo IMK, & triangulum NOB simile triangulo I M L, & ob id vt NB, ad NO, ita erit IL, ad IM, & vt NO, ad OA, ita IM, ad MK, quare ex æquali vt NB, ad AO, ita erit IL, ad MK.

Et

Et quoniam eſt vt CD, ad IL, ita FG, ad kM. æqualis videlicet ad æqualem, erit permutando vt CD, ad FG, ita IL, ad KM, ſed & NB, ad AO, eſt ſicut IL, ad Mk, vt eſt demonſtratum: ergo vt CD, ad FG, ita erit NB, ad AO, & conſequenter vt quadratum CD, ad quadratum FG, ita quadratum NB ad quadratum AO, ſed quadratum NB * æquale eſt rectangulo ABO: eſt enim * NB media proportionalis inter AB, BO, ergo vt qua- *17.Sexti.*
dratum CD ad quadratum FG hoc eſt vt R, ad S, ita erit rectan- *Ex coroll.*
gulum ABO, ad quadratum AO, ſecta eſt igitur AB, in O, vt fa- *prop 8. Sexti.*
cere oportebat.



ALITER quoq; hoc Problema abſoluemus.

Sit AB data recta linea ſecanda: ratio autem rectã guli ſub tota, & altera parte ad quadratum partis reliquæ ſit vt ED, ad DC. Ponantur in directũ ED, DC, & in EC deſcribatur ſemicirculus EFC, ipſiq; EC ducatur perpendicularis DF, & ſecetur FD bifariam in H, & iungatur EH, & centro H, interuallo HE deſcribatur circulus, ſecans FD productam in punctis G, I, & fiat vt GD, ad DE, ita AB, ad Bk: deſcribatur autem in AB ſemicirculus ALB, in quo accommodetur ipſi Bk, æqualis BL, & demittatũ ad AB perpẽdicularis LM. Quoniam igitur æquales ſunt GH, HI, & æquales quoque FH, HD, erunt & reliquæ GF, DI æquales. Et quoniam eſt vt GD, ad DE, ita AB, ad Bk, hoc eſt ad BL: erit vt quadratum GD, ad quadratum DE, ita quadratum AB, ad quadratum BL, ſed quadratum GD ad quadratum DE, eſt ſicut GD, ad DI, & quadratum AB ad quadratum BL, ſicut AB, ad BM, eſt enim * quadratum primæ trium proportionalium ad quadratum ſecundæ, ſi- *Ex coroll.*
cut prima ad tertiam, ergo vt GD, ad DI, hoc eſt ad FG, ita erit *prop. 20.*
AB, ad BM, per conuerſionem rationis, vt GD, ad FD, ita AB ad *6.*
AM, & permutando vt GD, ad AB, ita erit FD, ad AM.

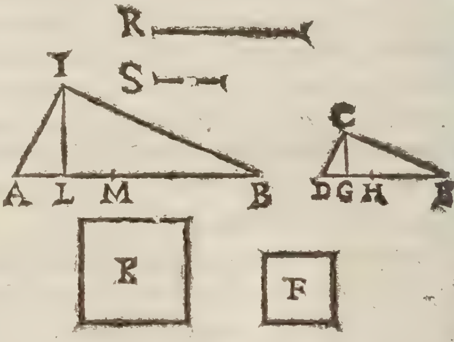
Rurſus quoniam eſt vt GD ad DE, ita AB ad BL, erit permutando vt GD ad AB, ita DE ad BL, ſed oſtẽſum eſt vt GD ad AB, ita eſſe FD ad AM, ergo vt DE ad BL, ita erit FD ad AM, & permutando, vt DE ad FD, ita BL ad AM, & vt quadratum DE ad quadratum FD, ita quadratum BL ad AM, quadratum, ſed qua- *17.Sexti.*
dratum BL * æquatur rectangulo ABM, eſt * enim BL media *Coro.pro.*
proportionalis inter AB & BM, vt igitur quadratũ DE ad qua- *8. Sexti.*

dratum FD, hoc est vt ED ad DC: prima nempe ad tertiã trium proportionalium, ita erit rectangulum ABM ad quadratũ. AM Secta est igitur AB data in M, vt secanda proponebatur.

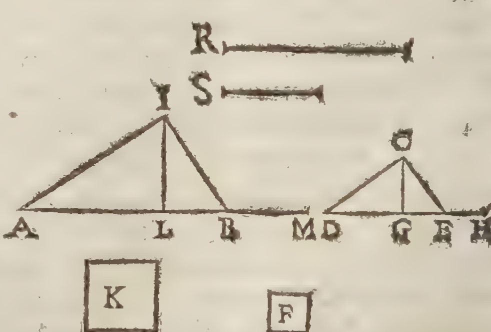
Problema XXVIII.

DATAM rectam lineam secare, vt rectangulum sub tota, & altera parte ad quadratum differentiæ partium, rationem habeat datam.

Hoc Problema duos casus habet, vel enim secanda proponitur data recta linea, vt rectangulum sub tota, & parte maiori, vel & parte minori, ad quadratum differentiæ partium rationẽ habeat datam: primo casu oportebit terminum datæ rationis primum, maiorem esse secundo: rectangulum enim sub tota, & parte maiori, maius est quadrato differentiæ partium, cum vtraque, tota videlicet, & pars maior: maiores sint quam partium differentia.



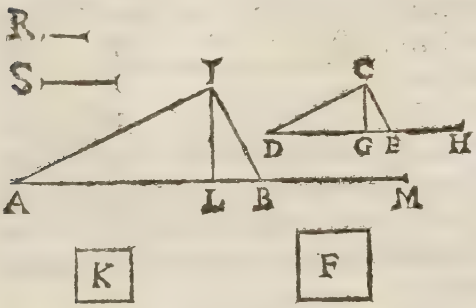
Secundus casus nulla indiget determinatione, rectangulum enim sub tota, & parte minori potest esse maius prædicto quadrato, & minus.



Sit igĩ data recta linea A B secãda in duas partes, vt rectangulum sub tota, & altera parte ad quadratum differentiæ partium, rationem habeat vt R, ad S. Exponatur aliquod quadratum k, & fiat vt R ad S, ita K quadratum, ad aliud quadratum quod sit F latus jautẽ quadrati k intelligatur vnum ex lateribus triãguli angulum rectum ambiẽtibus, maius videlicet in prima figura, quæ ad primum casum pertinet, minus in secunda, & tertia, quæ pertinẽt

ad

ad secundum casum, latus verò quadrati F intelligatur differētia segmentorum basis. Itaque dato vno ex lateribus trianguli angulum rectum ambientibus, & differentia segmentorum basis, inueniatur triangulum, id enim iam docuit Problema decimumoctauum. Sit igitur illud triangulũ CDE, in quo perpēdicularis CG ab angulo recto demissa secet basim in duo segmenta D G, GE, quorum differentia E H sit æqualis lateri quadrati F, & latus CE æquale lateri quadrati K: denique describatur in AB triangulum I A B triangulo CDE simile similiterque positum, à cuius angulo recto demissa in basim perpendicularis IL secet eam in duo segmenta AL, LB, quorũ differentia sit M B. Quoniam igitur similia sunt triãgula I A B, C D E, erit angulus A æqualis angulo D, & angulus I B L æqualis angulo CEG, atque anguli ad L, & G, sunt recti, & ideo æquales, ergo triangulum I L B simile erit triangulo CGE, & triãgulum I L A triangulo CGD, & propter similitudinem erit vt BL ad LI, ita EG ad GC, & vt LI ad LA, ita GC ad GD, ergo ex æquali erit vt BL ad LA: hoc est ad LM, ita EG ad GD, idest ad GH, & per conuersionem rationis vt BL ad BM, ita erit EG ad EH.



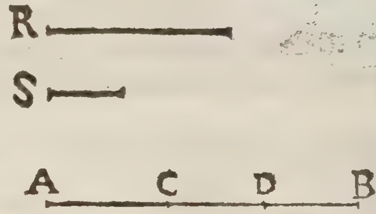
Et quoniam propter triangulorum similitudinem est vt IB ad BL, ita CE ad EG, & vt BL ad BM, ita EG ad EH, vt est demōstratum, erit ex æquali vt IB ad BM, ita CE ad EH: hoc est ita latus quadrati k ad quadrati F latus, vt igitur quadratum I B ad quadratum M B, ita erit K quadratum ad F quadratum, sed K quadratum ad F quadratum est, vt R ad S: ergo vt R ad S, ita erit quadratum IB ad MB, quadratum, sed quadratum IB * æquale est rectangulo ABL, est enim IB * media proportionalis inter AB, LB, ergo vt R ad S, ita erit rectangulũ ABL ad quadratum MB. Secta est igitur AB in L, vt facere oportebat. 17. 6. Ex coroll. 8. 6.

Problema XXIX.

DATAM rectam lineam, ita secare, vt rectangulum sub tota, & differentia partium ad quadratum differentiæ,

rentiæ, rationem habeat datam. Oportet autem datæ rationis terminum primum maiorem esse secundo: rectãgulum enim sub tota, & differentia partium maius est quadrato prædictæ differentiæ.

Sit AB data recta linea secãda, ita vt rectãgulum sub ipsa AB, & differentia partium ad quadratũ ipsius differentiæ, rationem habeat vt R ad S, cuius rationis terminus R sit maior quam S. Sece-

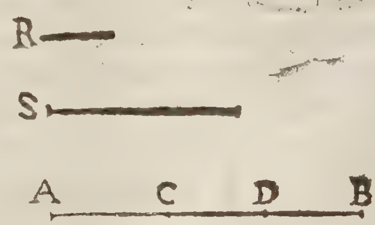


16.Sexti. tur * AB in C, vt sit AB ad AC, sicut R ad S, ipsa verò CB secetur bifariam in D, itaque differentia partiũ AD, DB, erit AC. Quoniam igitur rectangulum BAC, & quadratum AC eandem ha-
1.Sexti. bent altitudinem AC, erit * vt AB ad AC, ita rectangulũ BAC ad AC quadratum, sed AB ad AC, est sicut R ad S, ergo vt R ad S, ita erit rectangulum BAC ad AC quadratum, Secta est igitur AB in D, vt facere oportebat.

Problema XXX.

DATAM rectam lineam ita secare, vt rectangulum sub tota, & differentia partium, ad quadratum totius, rationem habeat datam. Oportet autem datam rationem esse minoris ad maius: rectangulum enim sub tota, & differentia partium minus est totius lineæ quadrato.

Sit data recta linea AB quã oportet secare, vt rectãgulum sub tota, & differẽtia partium ad quadratum totius AB rationẽ habeat vt R ad S, cuius rationis terminus R sit minor quam S. Fiat vt S ad R, ita AB ad AC, & secetur CB bifariam in D. Quoniam igitur vt S ad R, ita est AB ad AC, erit conuertendo vt R ad S, ita AC ad AB, sed vt AC ad AB, ita est rectangulum BAC ad quadratum

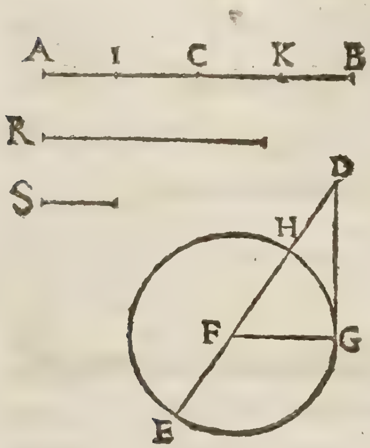


AB,

AB, eandem enim habent altitudinem AB, vt igitur R ad S, ita erit rectangulum BAC ad AB quadratum: est autem rectangulum B A C illud quod tota A B, & differentia partium A D, DB continetur, quia ipsarum partium differentia est AC, sunt enim CD, DB æquales. Secta est igitur AB in D, vt facere oportebat.

Problema XXXI.

DATAM rectam lineam ita secare, vt rectangulum sub tota, & differentia partium ad rectangulum sub partibus, datam habeat rationem.



Sit data linea recta A B quam oportet secare, vt rectangulum sub tota, & differentia partium ad rectangulum sub partibus rationem habeat vt R ad S. Secetur A B bifariam in C, & fiat vt R ad S, ita AB ad aliam quæ sit FG: ipsi autem FG ducatur perpendicularis G D, ipsi verò A C æqualis, & conectatur FD, & cẽtro F, interuallo FG describatur circulus, quem secet DF continuata in punctis E, H, & ponantur ipsi H D æquales C K, C I. Quoniã igitur ęquales sunt AC, CB, & æquales quoque IC, Ck, fiunt æquales & reliquæ AI, kB, & ideo differentia inter A k, K B erit Ik. Et quoniam AB secta est in partes æquales in C, & inæquales in k, rectangulum AkB vnà cum quadrato CK æquale * erit quadrato AC: hoc est DG, 5. Secũdi. seu quod idem est rectangulo EDH, recta enim DG tangit circulum in G, sed rectangulũ EDH æquale * est rectangulo EHD 3. Secũdi. vnà cum quadrato HD, ergo rectangulum AKB, vnà cum quadrato Ck æquale erit rectãgulo EHD, vnà cum quadrato HD: auferantur æqualia quadrata C K HD, reliquum igitur rectangulum AkB reliquo rectangulo EHD æquale erit.

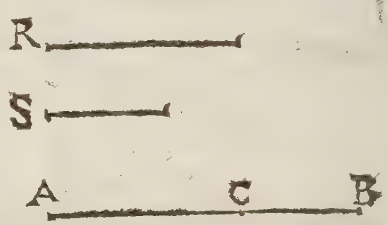
Et quoniam est vt R ad S, ita AB ad FG, hoc est ad FH, vt autem AB ad FH, ita rectangulum AB, CK ad rectangulum FHD: æquales enim habent altitudines Ck, HD, erit vt R ad S, ita rectangulum

ctangulum AB, Ck ad rectangulum FHD, & conſequenter ita duplum rectanguli AB, Ck ad duplum rectanguli FHD, hoc eſt ita rectangulum AB, Ik ad rectangulum EHD, ſed rectangulũ EHD oſtenſum eſt æquale rectangulo AkB, ergo vt R ad S, ita erit rectangulum AB, Ik ad rectangulum AKB. Secta eſt igitur AB in k, vt facere oportebat.

Problema XXXII.

DATAM rectam lineam ita ſecare, vt rectangulum ſub tota, & altera parte ad rectangulum ſub partibus, rationem habeat datam. Oportet autem datæ rationis terminum primum maiorem eſſe ſecundo: rectangulum enim ſub tota, & altera parte maius eſt rectangulo ſub partibus.

Sit data recta linea AB ſecãda in duas partes, vt rectangulũ ſub tota, & vna parte ad rectãgulum ſub partibus, rationem habeat vt R ad S, cuius rationis terminus R
10. Sexti. ſit maior quã S. Secetur * AB in C, vt ſit AB ad AC, ſicut R ad S, ergo factum erit quod proponitur: eſt enim vt AB ad AC, ita rectangulum ABC ad rectangulũ ACB propter eandem altitudinem CB, ſed AB ad AC eſt ſicut R ad S, ex cõſtructione, ergo vt R ad S, ita erit rectangulũ ABC ad ACB rectangulũ. Secta eſt igitur AB in C, vt faciendum erat.

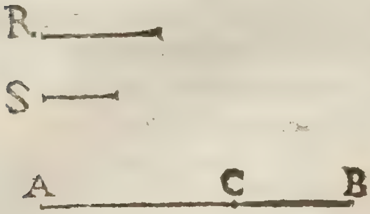


Problema XXXIII.

DATAM rectam lineam ita ſecare, vt rectangulum ſub tota, & vna parte ad rectangulum ſub tota, & altera parte, rationem habeat datam.

Sit AB data recta linea ſecanda in duas partes, ita vt rectãgulum ſub tota, & vnà parte ad rectangulũ ſub tota, & altera parte rationem habeat vt R ad S. Hoc autem nihil aliud eſt niſi ipſam AB ſecare in duas partes, ita vt partium ratio ſit eadẽ quæ R ad S,

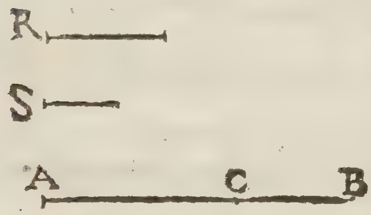
R ad S, ſecetur * enim in C, vt ſit AC ad CB, ſicut R ad S. Quo- 10. Sexti.



niā igitur rectangula BAC, ABC eandem habent altitudinem AB, erit vt AC ad C B, ita rectāgulum BAC ad rectangulū ABC, ſed AC ad CB, eſt ſicut R ad S, ex conſtructione; ergo vt R ad S, ita erit rectangulum BAC ad ABC, rectangulum. Punctum igitur C Problema efficit, quare factum eſt quod oportebat.

Problema XXXIV.

DATAM *rectam lineam ita ſecare, vt quadratum alterius partis ad rectangulum ſub partibus, rationem habeat datam.*



Sit AB ſecanda in duas partes, ita vt quadratū alterius partis, ad rectāgulum ſub partib. rationem habeat vt R ad S. Conſtructio huius problematis eadem eſt q̄ precedētis: ſi enim AB ſecetur in C, ita vt A C ad C B, rationē habeat vt R ad S, punctum C problemati ſatisfaciet: erit enim vt AC ad CB, ita quadratū AC ad rectangulum ACB propter eandem altitudinem AC, ſed AC ad CB, eſt ſicut R ad S, ex conſtructione, ergo vt R ad S, ita erit quadratum A C ad rectangulum A C B, punctum igitur C problemati ſatisfacit, quare factum eſt quod oportebat.

Problema .XXXV.

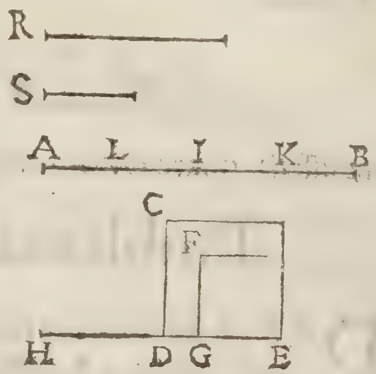
DATAM *rectam lineam ita ſecare, vt quadratum alterius partis ad quadratum differentiæ partium, rationem habeat datam.*

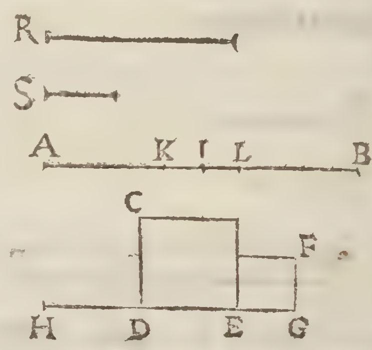
Hoc Problema duos caſus habet: vel enim datam rectam lineam ſecare oportet, vt quadratū partis maioris, vel partis minoris ad quadratum differentiæ partium, rationem habeat da-

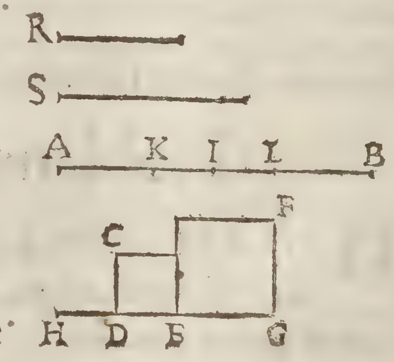
I tam,

tam : primo caſu oportebit datam rationẽ,eſſe maioris nempe ad minus:pars enim maior,maior eſt quam partiũ differentia. Secundus caſus non indiget determinatione,pars enim minor poteſt eſſe maior prædicta differentia , & etiam minor.

Sit igitur data recta linea A B q̃ oportet ita ſecare,vt quadratũ alterius partis,ad quadratum differentiæ partium rationẽ habeat vt R ad S. Exponat̃ aliquod quadratum CDE,& fiat vt R ad S,ita quadratũ CDE,ad aliud quadratum quod ſit F G E, & ED duplicetur in H, ipſa autẽ A B ſecetur bifariã in I, & fiat vt HG ad GE, ita AI ad IK: ergo in prima figura quæ ad primum caſum pertinet,erit componendo,in ſecũda verò & tertia, quæ pertinent ad ſecundum caſum,erit diuidẽdo, vt HE ad GE,ita Ak ad Ik,& duplatis conſequentib.vt HE ad duplã GE,ſeu quod idem eſt vt DE, quæ eſt dimidia ipſius HE ad GE ſimplã, eſt.n.eadẽratio totius ad totum quæ dimidij ad dimidiũ, ita erit Ak ad duplam IK quæ ſit LK : quare vt quadratum DE ad quadratum G E, ita erit quadratum Ak ad Lk quadratũ,ſed quadratum DE ad quadratũ GE, eſt ſicut R ad S,ex cõſtructione, ergo vt R ad S , ita erit quadratum AK ad quadratum Lk, differẽtię videlicet partium A k , k B, cum enim A I, I B ſint æquales, & æquales quoque L I, I K , fiunt & AL, KB æquales,& ideo differẽtia inter AK,KB,eſt Lk.Secta eſt igitur AB in k,& impleta Problematis conditio.

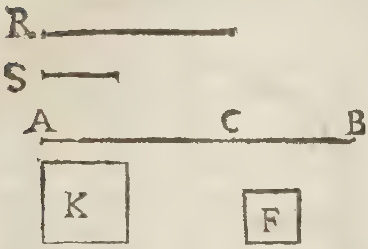






Problema XXXVI.

DATAM rectam lineam ita ſecare, vt partium quadrata datam teneant rationem.



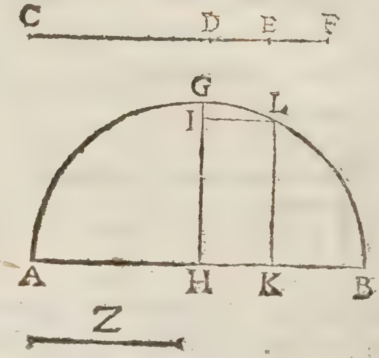
Sit data recta linea A B ſecāda in duas partes, ita vt partium quadrata rationē teneant vt R ad S. Exponatur aliquod quadratū k, & fiat vt R ad S, ita k quadratum ad aliud quadratū quod ſit F. Deinde ſecet AB in C, vt ſit A C ad CB, ſicut latus quadrati k ad quadrati F latus. Quoniam igitur eſt vt AC ad CB, ita latus quadrati K ad quadrati F latus, erit vt quadratum AC ad quadratū CB, ita k quadratum ad F quadratū, ſed k quadratum ad F quadratum, eſt ſicut R ad S, ex conſtructione, ergo vt R ad S, ita erit quadratum AC ad CB quadratum. Secta eſt igitur AB in C, vt facere oportebat.

Problema XXXVII.

DATAM rectam lineam ita ſecare, vt partium quadrata ſimul ſumpta ad rectangulum ſub partibus, rationem habeant datam. Oportet autem datæ rationis terminum primum non eſſe minorem duplo ſecundi: minimū enim aggregatum quadratorum duplum eſt rectāguli ſub partib. maximi, hoc aūt accidit quando data linea ſecta eſt bifariā.

Sit data recta linea AB quam oportet, ita ſecare, vt partium quadrata ſimul ſumpta ad rectangulum ſub partibus rationem habeant vt CD ad DE, cuius rationis terminus CD non ſit minor duplo ipſius DE. Secetur AB bifariā in H, & in ea deſcribatur ſemicirculus AGB, ipſiq; AB ducatur perpendicularis HG, & DE duplicetur in F, & fiat vt CF ad EF, ita quadratum AB ad aliud quadratum cuius latus ſit Z: quadratum igitur AB nō erit minus quadruplo, quadrati Z, quia & CF non eſt minor quam EF quadrupla, ergo ipſa AB non erit minor duplo lateris Z, & conſequenter HG, dimidia videlicet ipſius AB non minor q̃ Z.

Sumatur ergo in HG ipsi Z, æqualis HI, & per I agatur ipsi AB parallela IL, & ad AB demittatur perpendicularis Lk, erit igitur Lk æqualis IH, hoc est ipsi Z. Et Quoniam est vt CF ad EF, ita quadratum AB ad quadratum Z, hoc est ad quadratum L k: seu quod idem est ad rectangulũ AKB, duplatis cõsequentib. erit vt CF ad DF, ita quadratum AB,



4. Secũdi. hoc est * aggregatum quadratorum A k, KB vnà cum duplo rectanguli AkB ad duplum rectanguli A K B, & diuidendo erit vt CD ad DF, ita aggregatum quadratorum Ak, KB ad duplum rectanguli AKB & subduplatis cõsequentib. erit vt CD ad DE, ita aggregatum quadratorũ AK, kB ad rectãgulũ AkB. Secta est igitur AB in K, vt facere oportebat.

L E M M A.

REctangulum sub aggregato, & differentia duorum laterum æquale est excessui quadratorum à lateribus.

Sint duo latera, A G maius, G B minus, ipsi autẽ GB ponatur æqualis GH, differẽtia igitur laterũ AG, GB erit AH. Dico rectãgulũ BAH æquale esse excessui quadratorum AG, GB.

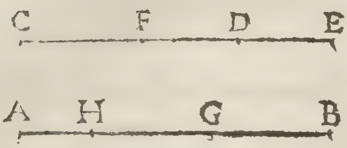


Quoniam enim HB secta est bifariam in G, & ei adiecta HA, rectangulũ BAH, vna cum quadrato GB * æquale erit quadrato AG, auferatur vtrinque quadratum GB, reliquum igitur rectangulum B A H æquale erit excessui quadratorum AG, GB, quod erat demonstrandum. (6. Secũdi.)

Problema XXXVIII.

DATAM rectam lineam ita secare, vt partium quadrata simul sumpta ad rectangulum sub tota, & differentia partium, rationem habeant datam. Oportet autem datam rationem esse maioris ad minus: quadrata enim partium

simul sumpta maiora sunt rectangulo sub tota, & differentia partium, quandoquidem illud rectangulum ex anteced. Lem. æquale est excessui quadratorum.



Sit igitur data recta linea AB quã oportet secare in duas partes, vt partium quadrata simul sumpta ad rectangulum sub tota, & differentia partium rationem habeãt vt CD ad DE, quorum terminorum rationis CD sit maior quam DE. Sumatur in CD ipsi DE æqualis DF, & * secetur AB in G, vt quadratum *3 6 Huius.* AG ad quadratum GB rationem habeat eandẽ, quam habet CE ad CF, ipsi autem GB ponatur æqualis GH, erit igitur per conuersionem rationis, vt quadratum AG ad excessum quadratorum AG, GB, hoc est ad * rectangulum BAH, ita CE ad FE, & *Ex antec. Lem.* duplatis antecedentibus, vt duplum quadrati AG, hoc est * vt * aggregatum quadratorum AG, GB, vnà cum rectangulo BAH, ad rectangulum BAH, ita erit dupla CE ad FE, hoc est ad duplã DE, & ideo ita CE simpla ad simplam DE: est enim eadem ratio dupli ad duplum quæ simpli ad simplũ, ergo diuidendo erit aggregatum quadratorum AG, GB ad rectangulum BAH, sicut CD ad DE, Secta est igitur AB in duas partes AG, GB quarum partium quadrata simul sumpta ad rectangulum sub tota AB, & differentia partium AG, GB, rationem habent vt CD ad DE, quod facere oportebat.

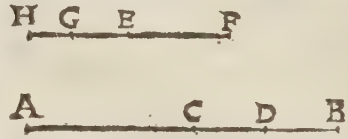
At verò duplum quadrati AG ęquale esse aggregato quadra * torum AG, GB, vnà cum rectangulo BAH, sic demonstrabitur. Quoniam enim quadratum AG æquale * est rectangulo BAH, *6 Secũdi.* vnà cum quadrato GB, addito communi quadrato AG, duplũ quadrati AG æquale erit aggregato quadratorum AG, GB, vnà cum rectangulo BAH, quod erat demonstrandum.

Problema XXXIX.

DATAM rectam lineam ita secare, vt partium quadrata simul sumpta ad totius lineæ quadratum, rationem habeant datam. Oportet autem datæ rationis terminum secundum, maiorem esse primo, non autem duplo primi: quadratum

dratum enim totius lineæ maius est quadratis partium, duplo autem ipsorum quadratorum non est maius.

Sit AB data recta linea secãda in duas partes, vt partiũ quadrata simul sumpta, ad quadratum totius AB rationẽ habeant vt EF ad FG, cuius rationis terminus F G sit maior quam E F,

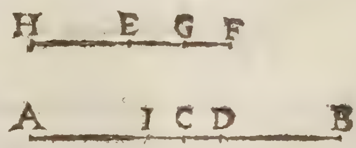


non autem quam duplum ipsius EF. Duplicetur FE in H, & secetur AB bifariam in C, & fiat vt FG ad GH, ita quadratum AC ad quadratum CD, ergo conuertendo erit vt HG ad GF, ita quadratum C D ad A C quadratum, & componendo vt HF ad GF, ita aggregatum quadratorum A C, C D ad AC quadratum, & duplatis consequentib. vt HF ad GF duplã, hoc est vt EF ad GF, (est enim eadẽ ratio dimidij ad dimidium quæ totius ad totũ,) ita erit aggregatum quadratorum AC, CD ad duplum quadrati AC, & ita duplum quadratorum AC, CD ad quadruplũ quadrati AC, hoc est ad quadratum AB, sed duplum quadratorum
9. Secũdi. AC, CD æquale * est quadratis AD, DB, vt igitur EF ad FG, ita erit aggregatum quadratorum AD, DB ad AB, quadratũ. Secta est igitur AB in duas partes A D, D B, quarum quadrata simul sumpta ad quadratum totius AB, rationẽ habent vt EF ad FG, quod erat faciendum.

Problema XL.

D*ATAM rectam lineam ita secare, vt partium quadrata simul sumpta, ad quadratum differentiæ partiũ datam habeant rationem. Oportet autem datam rationem esse maioris ad minus.*

Sit data recta linea AB secanda in duas partes, vt partiũ quadrata simul sumpta ad quadratũ differẽtiæ partium rationem habeant vt EF ad FG, quæ ratio sit maioris ad minus. Duplicetũ



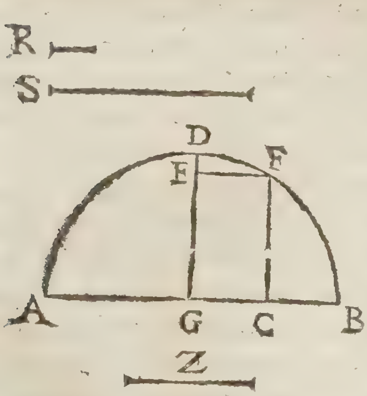
FE in H, & AB secetur bifariã in C, & fiat vt HG ad GF, ita quadratum AC ad quadratũ CD, ipsi aũt C D ponatur æqualis C I.

Quoniam

Quoniam igitur AC, CB ſunt æquales, & æquales quoque IC, CD, fiunt & reliquæ AI, DB æquales, quare differentia partium AD, DB erit ID: Et qm̃ eſt vt HG ad GF, ita quadratum AC ad CD quadratum, erit componendo vt HF ad GF, ita aggregatũ quadratorum AC, CD ad quadratũ CD, & duplatis conſequẽtibus vt HF ad duplam GF, hoc eſt vt EF ad GF, (eſt enim eadẽ ratio dimidij ad dimidiũ quæ totius ad totũ) ita erit aggregatũ quadratorũ AC, CD ad duplum quadrati CD, & ita duplũ quadratorũ AC, CD ad quadruplũ quadrati CD, hoc eſt ad quadratũ ID, ſed duplũ quadratorũ AC, CD ęquale* eſt quadratis AD, DB, vt igitur EF ad FG, ita erit aggregatũ quadratorũ AD, DB ad quadratum ID. Secta eſt igitur AB in D, vt facere oportebat. 9 Secũdi

Problema XLI.

DATAM rectam lineam ita ſecare, vt rectangulum ſub partibus ad quadratum totius lineæ, datã habeat rationem. Oportet autem datæ rationis, terminum ſecundum non eſſe minorem quadruplo primi: quadratum enim totius lineæ quadruplum eſt rectanguli ſub partibus maximi, hoc autem accidit quando linea data ſecta eſt bifariam.



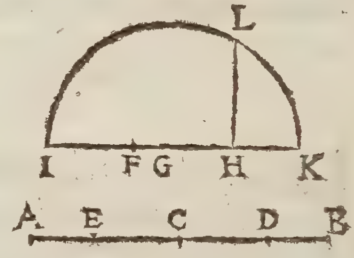
Sit igitur AB data recta linea ſecanda in duas partes, vt rectangulũ ſub partib. ad quadratũ totius AB rationẽ habeat vt R ad S, cuius rationis terminus S, non ſit minor quadruplo ipſius R. Secetur AB bifariã in G, & in ea deſcribatῖ ſemicirculus ADB, à pũcto aũt G ducatur ipſi AB perpendicularis GD, & fiat vt S ad R, ita quadratum AB ad aliud quadratum cuius latus ſit Z. Qm̃ igitur S nõ eſt minor quadruplo ipſius R, quadratũ AB non erit minus quadruplo quadrati Z, neque ideo recta AB minor, erit duplo lateris Z, nec denique GD hoc eſt dimidia AB minor erit q̃ Z, ſumatῖ ergo in GD ipſi Z ęqualis GE, & ipſis AB, DG parallelæ agantur EF, FC, erit igitur FC, æqualis EG, hoc eſt ipſi Z. Et quoniam eſt vt S ad R, ita

quadratum

quadratum AB ad quadratum Z, hoc eſt ad FC quadratum, ſeu quod idem eſt ad rectangulū ACB, erit conuertendo vt R ad S, ita rectangulum ACB ad AB quadratum. Secta eſt igitur AB in G, vt facere oportebat.

Problema XLII.

DATAM rectam lineam ita ſecare, vt rectangulum ſub partibus ad quadratum differentiæ partium, datam habeat rationem.



Sit data recta linea A B ſecanda in duas partes, vt rectangulum ſub partib. ad quadratū differentiæ partium rationē habeat vt FG ad GH. Secetur AB bifariam in C, & dupli cetur GH in K, ipſa verò GF quadruplicetur in I, & in Ik deſcribatᷣ ſemicirculus ILk, à puncto aūt H excitetᷣ ad IK perpendicularis HL, & fiat vt IH ad HL, ita AC ad CD, ipſiq; CD ponatur æqualis CE. Quoniam igitur æquales ſunt AC, CB, & æquales quoque EC, CD, fiunt & reliquæ AE, DB æquales, quare differentia ipſarum AD, DB erit ED. Et qm̄ eſt vt IH ad HL, ita AC ad CD, erit vt quadratum IH ad quadratum HL, ita quadratum AC ad CD quadratum, ſed quadratū IH ad quadratum HL, eſt vt IH ad Hk: eſt enim * vt quadratum primę trium proportionalium ad quadratū ſecundæ, ita prima ad tertiam, vt igitur IH ad HK, hoc eſt ad HG, ita erit quadratum AC ad quadratum CD, & diuidēdo erit vt IG, hoc eſt vt quadrupla FG ad GH, ita exceſſus quadratorum AC, CD ad quadratū CD, & quadruplatis conſequentib. vt FG quadrupla ad GH quadruplam, ſeu quod idem eſt vt FG ſimpla ad ſimplam GH: eſt enim eadem ratio vtrobique, ita erit exceſſus quadratorum AC, CD ad quadruplum quadrati CD, hoc eſt ad quadratum ED, ſed exceſſus quadratorum AC, CD æqualis eſt rectangulo DAE, hoc eſt A D B ex Lemmate in Prob. 37, ergo vt FG ad GH, ita erit rectangulum ADB ad quadratū ED. Secta eſt igitur AB in duas partes AD, DB ſub quibus rectangulum ADB ad quadratū differentiæ ipſarum rationem habet vt F G ad GH, quod erat faciendum.

Coroll. 2. 20. Sexti.

FINIS.